فراه علمي-څېړنيز ژورنال
دويم کال، درېيمه ګڼه، ۱۴۰۳ ل.ل، ژمی
مخ: ۲۰۵-۲۱۴

دويم ترتيب متجانسې خطي تفاضلي معادلې د ثابتو ضريبونو سره

پوهنمل محمد حسين فراهی[۱]، پوهنمل جاويد هاشمی[۲]، رياضي څانګه، ښوونې او روزنی پوهنځی، فراه لوړو زده کړو مؤسسه

ايميل ادرس : Mh.farahi2018@gmail.com

لنډيز

د دې لپاره چې لوستونکي وکولای شي، چې د رياضياتو او فزيکي علومو او يا انجنيری تر منځ اړيکه درک کړي. تفاضلي معادلې يې ډېره ښه لاره ده. مخکې لەدې چې انجنير يا زدەکړيالان د تفاضلي معادلو د استعمال ځايونو ته متوجه يا د هغې په مطالعه بوخت شي؛ لازمه ده، چې د تفاضلي معادلو د حلولو مختلف مېتودنه زدەکړي. د دې څېړنې اصلي هدف دا دی، چې د دويم ترتيب متجانسي خطي تفاضلي معادلې د ثابتوضريبونو سره د مشخصې معادلې پيداکول او د مشخصې معادلې د جذرونو د پيداکولو پەواسطه د راکړل شوي تفاضلي معادلې عمومي حل پەلاس راوړلای شو. د دې څېړنې د ترسره کولو په موخه د کتابتوني مېتود څخه استفاده شوې، چې پکې له بېلابېلو کتابونو او معتبرو سرچينو څخه ګټه اخيستل شوې ده. په نتيجه کې د (دويم ترتيب متجانسې خطي تفاضلي معادلې د ثابتوضريبونو سره) د مشخصه معادلې لپاره هر اړخيزه څېړنه شوې. پەدې څېړنه کې د (دويم ترتيب متجانسې خطي تفاضلي معادلې د ثابتوضريبونو سره) د عمومي حل لپاره مختلف حالتونه څېړل شوي، لکه: که د دويم ترتيب متجانسې خطي تفاضلي معادلې د ثابتوضريبونو سره مشخصه معادله درلودونکې د دوه مختلف جذرونه ولري، درلودونکې د دوو مساوي جذرونو وي او يا درلودونکې د مختلط جذرونو وي.

ار وييونه: تفاضلي معادلې، ثابت ضريبونه، دويم ترتيب تفاضلي معادلې، متجانس

سريزه

ښکاره خبره ده، چې د نړۍ لومړنيو انسانانو د ژوند له پيل څخه هغه موارد تر بحث او څېړنې لاندې نيولي، چې دوی ورته لاسرسی نه‌لري، ځکه رياضي داسې يو بحر دی، چې سر او پای يې نه معلومېږي. په بېلابېلو برخو باندې وېشل کېږي، د رياضي په بېلابېلو برخو باندې څېړنه ترسره کول نه يوازې د رياضي د زده کړيالانو لپاره گټور دی، بلکې د هر څېړونکي لپاره اړينه ده، ځکه د يو لارښود حيثيت لري او څېړونکي طبيعي او اجتماعي واقعيتونو ته رسوي. دا خبره ځکه کوو، چې د رياضي د علم هره موضوع د بشريت د پايلو، تطبيقاتو او اړتياوو پر اساس رامنځته شوې او په بېلابېلو مواردو کې د بشريت د استفادې وړ گرځي. لکه څنگه چې معلومېږي د تفاضلي معادلو اړوند مختلف کتابونه او مقالې ليکل شوي دي. اما د دويم ترتيب متجانسې خطي تفاضلي معادلې د ثابتوضريبونو سره په اړوند کوم ټاکلی اثر يا مقاله په پښتو ژبه نه‌ده ليکل شوې. خو په ځينو کتابونو کې د فرعي سرليک سره راغلي دي. د دې څېړنې اصلي موضوع د دويم ترتيب متجانسې خطي تفاضلي معادلې د ثابتوضريبونو سره ده. د نوموړې څېړنې په ترتيب او تهيه کې مې له داخلي او خارجي معتبرو منابعو څخه استفاده کړې ده. تر څو نوموړي موضوع په روانه او ساده ژبه تحليل او تجزيه شوې وي، داسې پوښتنه را پيدا کېږي، چې د دويم ترتيب متجانسې خطي تفاضلي معادلې د ثابتوضريبونو سره عمومي حل څرنگه په لاس راوړلای شو؟ د دې څېړنې اصلی هدف د دويم ترتيب متجانسې خطي تفاضلي معادلې د ثابتوضريبونو سره د مشخصې معادلې پيداکول او د مشخصې معادلې د جذرونو د پيداکولو په واسطه د راکړل شوي تفاضلي معادلې عمومي حل په لاس راوړلای شو.

د څېړنې مخينه تفاضلي معادلې چې مهمي طبيعي پديدې لکه د اوبو د زېرمو تبخير، د اجسامو خوسا کېدل، د راديو اکتيف عناصرو تشعشع، د فوسيلونو د عمر ټاکل او داسې نورو پدېدو تحليل او سنجش پرې کېږي(غوري، ۱۳۹۱). په همدې اساس تفاضلي معادلې يو د مهم ترين او عين حال کي جذاب ترين ښاخه د رياضياتو د طبيعي علومو د درک لپاره ده(ايمل، ۱۳۹۵: ۱). په وروستيو پيړيو کې، انالېز د رياضياتو تر ټولو مهمه څانگه گڼل کېږي، او تفاضلي معادلې يې اساسي برخه تشکيلوي. له بلې خوا، تفاضلي معادلې د يوې قوي وسيلې په توگه د بشري پوهې د بېلابېلو برخو د مسايلو په حل کې کارول

فراه علمي-څېړنيز ژورنال
دويم کال، دريېمه ګڼه، ۱۴۰۳ ل.ل، ژمی
مخ: ۲۰۵-۲۱۴

کېږي (پورکاظمی، ۱۳۸۹). د تفاضلي معادلو نظريه د رياضي يوه ښه ترينه او عمومي ترينه نظريه ده، چې د هغه په‌واسطه کولاي شو د طبيعي او انساني علومو قوانين توضيح کړو. اويلر د ثابتو ضريبونو لرونکو متجانسو تفاضلي معادلو عمومي حل، د مختلفو ريښو موندل، د ثابتو ضريبونو لرونکو تفاضلي معادلو حل او وروستنۍ پايلې د (۱۳۶۹-۱۳۶۸م) کلونو ترمنځ د غير متجانسو معادلو د حل لپاره وکارولې (ايوبی، ۱۳۹۶). تفاضلي معادلې د رياضياتو يوه مهمه برخه تشکيلوي، چې په بېلابېلو ساينسي او انجينرۍ برخو، لکه: فزيک، کيميا، بيولوژي، الکترونيک، ميخانيک، نجوم، اقتصاد، او نورو علمي برخو کې پراخ استعمال لري (ايمل، ۱۳۹۵).

د څېړنې کړنلاره

لکه څنګه چې هره څېړنه د يوه ځانګړي ميتود پر بنسټ ترسره کېږي، په دې مقاله کې له توصيفي- تحليلي ميتود څخه استفاده شوې ده. معلومات په کتابتونيز ډول د بېلابېلو کتابونو او معتبرو سرچينو څخه راټول شوي دي.

تفاضلي معادلې

د ديفرانسيل معادلو اصطلاح د لومړي ځل لپاره په ۱۶۷۶ م کال کې د $Leibniz$ په واسطه په کار وړل شوې‌ده او هغه دغه اصطلاح د هر ډول رابطې په منځ کې د ديفرانيسلو dx او dy، د x او y متحولينو او ثابتو مقدارونو a, b, c, ... د نمايش لپاره پکار وړې ده . هره رابطه په منځ کې د تابع $y = f(x)$ ، مستقل متحول x او مشتق د تابع نظر مستقل متحول ته چې لږ تر لږه يو د دې مشتقاتو پکې شامل وي د تفاضلي معادلې په نوم يادېږي (فرخ زاده، ۱۳۶۶: ۱).

تفاضلي معادلې په دوو ګروپونو ويشل کېږي:

که چيرې تابع يواځې يو مستقل متحول ولري، نو دې ته معمولي تفاضلي معادله وايي او که چېرې يوه تابع د يو څخه زيات مستقل متحولين ولري، نو دې ډول تفاضلې معادلو ته نسبي تفاضلې معادلې يا (تفاضلي معادله د قسمي مشتقاتو سره) وايي (نيکوکار، ۱۳۹۴: ۱).

فراه علمي-څېړنيز ژورنال
دويم کال، درېيمه ګڼه، ۱۴۰۳ ل.ل، ژمی
مخ: ۲۰۵-۲۱۴

مثال:

$$1.\quad y' = 7 \qquad 2.\ y'' + 3(y')^2 + cosx = 4 \qquad 3.\frac{\partial^2 u(x,\ y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y.\partial x}$$

لومړۍ او دويمه شمېره معمولي تفاضلي معادلې ښيي او درېيمه شمېره نسبي تفاضلي معادلې ښيي.

دويم ترتيب متجانسې خطي تفاضلي معادلې د ثابتوضريبونو سره

تعريف: که چېرې په لاندې شکل سره يوه تفاضلي معادله ولرو، چې ضريبونه يې حقيقي اعداد وي نو دويم ترتيب متجانسې خطي تفاضلي معادله ورته ويل کيږي او يا هغه تفاضلي معادله، چې هم خطي او هم متجانسه وي مګر د مشتق درجه يې دوه وي دوهمه مرتبه متجانسه خطي تفاضلي معادله بلله کيږي(نظرخيل، ۱۳۹۳: ۱۴۱).

دويم ترتيب متجانسې خطي تفاضلي معادلې د ثابتو ضريبونو سره په لاندې شکل کې ښودل کېږي(رحمانی دوست، ۱۳۸۲: ۸۷).

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (1)$$

چې په پورتنۍ معادلې کې $(p, q) \in \mathbb{R}$ ثابت مقدارونه او د x د تعريف ساحه د x محورونه دي. څرنګه معادله حل کړو؟ لکه څرنګه چې معلومېږي که چېرې y_1 او y_2 دوه مستقل خطي حلونه د (۱) معادلې وي نو $y = C_1y_1 + C_2y_2$ عمومي حل د لومړۍ (۱) معادلې دی. د y_1 او y_2 حلونو د پيداکولو لپاره، د لومړۍ معادلې په نظر کې نيولو سره د $y = e^{\lambda x}$ شکل پلټو.

$$(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0 \qquad (2)$$

په (۱) معادلی کې د $y\,, y', y''$ تعويض په صورت کې په ترتيب $\lambda^0,\ \lambda,\ \lambda^2$ سره يوه الجبري معادله لاس ته راځي. په همدې ترتيب د (۲) معادله د (۱) معادلې د مشخصې معادلې په نامه يادېږي. د ثابتو ضريبونو دويم ترتيب متجانسې خطي تفاضلي معادلو د حل په خاطر لاندې حالتونه په نظر کې نيسو.

لومړی حالت:

که چېرې د (۲) مشخصه معادله درلودونکې د دوو مختلفو جذرونو وي، يعنې $\lambda_1 \neq \lambda_2$ وي، په داسې حال چې $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ او $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ دوه غير تړلي خطي حلونه

د معادلې دي، چې په همدې حالت کې عمومي حل د (۱) معادلې عبارت د$y=$ $c_1e^{\lambda_1x}+\ c_2e^{\lambda_2x}$ دی (Новикова & Родионов: 2013, Родионова).

مثال ۱: د لاندې تفاضلي معادلې عمومي حل په لاس راوړئ؟

$$y''-4y'+3y=0 \qquad (3)$$

حل: لومړی د (۳) معادلې مشخصه معادله ترتیب وو په همدې اساس y'',y',y په $\lambda^2,\lambda,1$ سره تبدیلوو، چې په نتیجه کې د (۳) معادلې مشخصه معادله په لاندې ډول په لاس راځي:

$$\lambda^2-4\lambda+3=0 \qquad (4)$$

وروسته د (۴) معادلې جذرونه په لاس راوړو:

$$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\,.\,3=16-12=4$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm2}{2}$$

$$\lambda_1=\frac{4+2}{2}=\frac{6}{2}=3\,,\qquad \lambda_2=\frac{4-2}{2}=\frac{2}{2}=1$$

لکه څرنگه، چې λ_1 او λ_2 مختلف دی، پس عمومي حل کولای شو، چې په لاندی ډول په لاس راوړو:

$$y_1=e^{\lambda_1x}=e^{x},\qquad y_2=e^{\lambda_2x}=e^{3x}$$

$$y=c_1e^{\lambda_1x}+\ c_2e^{\lambda_2x}\Longrightarrow y=c_1e^{x}+\ c_2e^{3x}$$

قضیه ۱.که چېرې $y_1=G(x)$ د $y''+py'+qy=0\ \ldots\ (1)$ متجانسې خطي تفاضلي معادلې یو ځواب وي نو $y=cG(x)$ (c ثابت دلخواه) به هم یو ځواب وي.

ثبوت: د تفاضلي معادلې د ځواب د تعریف په اساس، کافي دی، چې و ښیو که چېرې $y=cG(x)$ او د هغه مشتقات په معادله کې صدق وکړي.

$$y=cG(x),\qquad y'=cG'(x),\qquad y''=cG''(x)$$

د $y\,,y',y''$ قیمتونه په (۱) معادله کې وضع کوو و به لرو، چې:

$$cG''(x)+pcG'(x)+qcG(x)=0$$

$$c[G''(x)+pG'(x)+qG(x)]=0$$

په قوس داخل افاده صفر ده ځکه فرض کړې مو وه، چې $G(x)$ ځواب د (۱) معادلې دی. په معادله کې صدق کوي (اعظم صافی، ۱۳۹۶: ۱۰۵).

قضيه ۲ . که چېرې y_1 او y_2 د متجانسې تفاضلي معادلې $y'' + py' + qy = 0 \ ... \ (1)$ ځواب وي نو $y_1 + y_2$ هم يو ځواب د پورتنۍ معادلې دی.

ثبوت: بايد و ښيو، چې $y_1 + y_2$ په (۱) معادله کې صدق کوي.

$$y_1'' + y_2'' + p(y_1' + y_2') + q(y_1 + y_2) = 0$$
$$(y_1'' + py_1' + qy_1) + (y_2'' + py_2' + qy_2) = 0$$

د دواړو قوسونو افادې صفر دي ځکه فرض کړې مو وه، چې y_1 او y_2 ځواب د (۱) معادلې دي(اعظم صافی، ۱۳۹۶: ۱۰۶).

نوټ ۱ : د پورتنۍ قضيې څخه پايله اخلو، که چېرې($\boldsymbol{y_1}$ **او** $\boldsymbol{y_2}$)دوه ځوابه د دويم ترتيب متجانسې خطي تفاضلي معادلې د ثابتوضريبونو سره وي، په همدې صورت کې $\boldsymbol{c_1y_1 + c_2y_2}$ هم يو ځواب د معادلې دی. يعنې که چيرې $\boldsymbol{y_1}$ او $\boldsymbol{y_2}$ دوه ځوابه د (۱) تفاضلي معادلې په يوه انتروال کې وي نو $\boldsymbol{y = c_1y_1 + c_2y_2}$ چې په هغه کې $\boldsymbol{c_1}$ او $\boldsymbol{c_2}$ ثابت او اختياري دی، چې يو حل د نوموړي (۱) تفاضلي معادلې په هم هغه فاصله کې دی. څرنګه چې دا ځواب په دوو ثابتو اختياري پارامترونو تړلی دی، نو کولای شي د معادلې عمومي ځواب وي؛ په دې شرط چې هغه و نه کولای شي په افادې يې تبديل کړي، چې تر دوو پارامترو لږ شامل وي.

قضيه ۳ : که چېرې y_1 او y_2 وابسته خطي تابع وي. ديترمنانت ورونسکي(ورونسکيان) يې د صفر خلاف دی.

قضيه ۴ : که چېرې y_1 او y_2 غير وابسته خطي تابع وي ديترمنانت ورونسکي(ورونسکيان) يې د صفر خلاف دی.

دوهم حالت:

که چېرې توضيحي معادله درلودونکې د حقيقي جذرونو وي او سره مساوي وي، يعنې $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ وی، په داسې حال چې $y_1 = y_2 = e^{\lambda x}$ وي او عمومي حل په لاندې شکل ليکلای شو(غوری، ۱۳۸۷: ۲۱۷).

$$y = e^{\lambda x}(c_1 + c_2x)$$

مثال ۲ : لاندې تفاضلي معادله عمومي حل په لاس راوړي:

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \qquad (5)$$

حل: په لومړي قدم کې د پورتنی معادلې مشخصه معادله تشکيل وو:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \qquad (6)$$

وروسته د (٦) معادلې جذرونه په لاس راوړو:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\,.\,9 = 36 - 36 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

نو په پايله کې عمومي حل دا رنګه ليکو:

$$y = e^{\lambda x}(c_1 + c_2 x)$$

$$y = e^{3x}(c_1 + c_2 x)$$

.(Родионова ,Новикова & Родионов: 2013)

درېيم حالت:

که چېرې د توضيحي معادلې جذرونه λ_1 او λ_2 مختلط اعداد وي، يعنې $\lambda_1 =$ $a + bi$ او $\lambda_2 = a - bi$ په داسې حال کې چې $a, b \in \mathbb{R}$ حقيقي اعداد وي او i د موهومي اعدادو واحد دی، په همدې اساس عمومي حل په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$y_1 = e^{ax}\cos bx, \qquad y_2 = e^{ax}\sin bx$$

$$y = e^{ax}(\cos bx + \sin bx)$$

مثال ۳ : د لاندينی تفاضلي معادلې عمومي حل په لاس راوړئ؟

$$y'' + y' + y = 0 \qquad (7)$$

حل: په لومړي قدم کې د پورتنی معادلې مشخصه معادله تشکيلوو:

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \qquad (6)$$

وروسته د (٦) معادلې جذرونه په لاس راوړو:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\,.\,1 = 1 - 4 = -3$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

د پورتنی جذر څخه ليکلای شو، چې $a = -\frac{1}{2}$ او $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

پس په پايله کې عمومي حل دا رنګه ليکو:

$$y_1 = e^{ax}\cos bx, \qquad y_2 = e^{ax}\sin bx$$

$$y_1 = e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x, \qquad y_2 = e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

(Родионова ,Новикова & Родионов: 2013).

پايله

د دې څېړنې د تر سره کولو وروسته دې پايلې ته ورسېدم، هغه دا چې د دويم ترتيب متجانسې خطي تفاضلي معادلې د ثابتو ضريبونو سره د عمومي حل لپاره ډېرې اسانه طريقې په لاس راغلې. چې د هغه پەواسطه د دويم ترتيب متجانسې خطي تفاضلي معادلې د ثابتو ضريبونو سره حلولای شو. درې حالتونو سره، چې کولای شو؛ د دويم ترتيب متجانسې خطي تفاضلي معادلې د ثابتو ضريبونو سره عمومي حل په اسانی سره په لاس راوړو هغه په لاندې څو ټکو کې خلاصه کوم:

۱ – د دويم ترتيب متجانسې خطي تفاضلي معادلې د ثابتو ضريبونو سره مشخصه معادله پەلاس راوړل او د هغې تحليل او تجزيه کول.

۲ – د دويم ترتيب متجانسې خطي تفاضلي معادلې د ثابتو ضريبونو سره عمومي حل په لاس راوړل، پەداسې حال کې، چې د هغې مشخصه معادله درلودونکې د دوو مختلفو جذرونو وي.

۳- د دويم ترتيب متجانسي خطي تفاضلي معادلې د ثابتو ضريبونو سره عمومي حل پەلاس راوړل، په داسې حال کې، چې د هغې مشخصه معادله درلودونکې د دوو مساوي جذرونو وي.

۴- د دويم ترتيب متجانسې خطي تفاضلي معادلې د ثابتو ضريبونو سره عمومي حل پەلاس راوړل، په داسې حال کې، چې د هغې مشخصه معادله درلودونکې د مختلطو جذرونو وي.

اخځليکونه

ايوبي، توفيق الله. (۱۳۹۶). **معادلات تفاضلی**. کابل: انتشارات سعيد.

ايمل، عبدالحق؛ قدوسی، عبدالحميد؛ يوسفزی، فواد. (۱۳۹۵). **معادلات تفاضلي معمولي**. کابل: انتشارات سعيد.

پورکاظمي، محمدحسين. (۱۳۷۹). **رياضيات عمومی و کاربرد های آن**. تهران: نشرنی.

رحماني دوست، محمدحسين. (۱۳۸۲). **مقدمه ای بر معادلات ديفرانسيل معمولي و کاربردهای آن**. ايلام: دانشگاه ايلام.

شمس، بيژن؛ فرخ زاده، کيخسرو. (۱۳۶٦). معادلات ديفرانسيل معمولی. ايران: انتشارات منصوری.

صافی، عبدالولی اعظم. (۱۳۹۶). **معادلات تفاضلی معمولی**. کابل: انتشارات سعيد.

غوري، محمد انور. (۱۳۸۷). **رياضيات عالی**. کابل: انتشارات سعيد.

غوري، محمد انور. (۱۳۹۱). **عالی رياضيات**. کابل: انتشارات سعيد.

نيکوکار، مسعود. (۱۳۹۳). **تفاضلي معادلې**. ننګرهار: زيارخپرندويه ټولنه.

نظرخيل، نورحبيب. (۱۳۹۳). **درېيم انالیز لکچر نوټ**. پوهنتون: کندهار.

Новикова, Е. В. Родионов, А. Г. Родионова, Н.В. (2013). **Линейные дифференциальные уравнения высших порядков**. Ижевск: Удмуртский университет.

فراه علمي-څېړنيز ژورنال
دويم کال، درېيمه ګڼه، ۱۴۰۳ ل.ل، ژمی
مخ: ۲۰۵-۲۱۴

Second order linear homogeneous equations with constant coefficients

Mohammad Hussain Farahi, Jawid Hashimi
Mathematics Department, Education Faculty, Farah Higher Education Institute
Email: **Mh.farahi2018@gmail.com**

Abstract

Differential equations are a great way for readers to understand the relationship between mathematics and the physical sciences or engineering. Before engineers or students can focus on the applications of differential equations or study them, it is necessary to learn the different methods of solving differential equations. The main goal of this research is to find the specific equation for a second-order homogeneous linear differential equation with constant coefficients and to obtain the general solution of the given differential equation by finding the roots of the specific equation. To conduct this research, the library method was used, which utilized various books and reliable sources. As a result, a comprehensive study was conducted for the specific equation (second-order homogeneous linear differential equation with constant coefficients). In this study, different situations for the general solution of (second-order homogeneous linear differential equations with constant coefficients) have been investigated. For example, if the specific equation of a second-order homogeneous linear differential equation with constant coefficients has two different roots, has two equal roots, or has mixed roots.

Key words: differential equation, constant coefficients, second order differential equation, homogeneous