



بررسی پولینوم‌های نوع اول پافنوتی چبیشف

پوهنمل جاوید هاشمی^۱ پوهنیار عبدالوارث صدیقی^۲

دیپارتمنت ریاضی، دیپارتمنت فزیک، پوهنځی تعلیم و تربیه، مؤسسه تحصیلات عالی
فراه

ایمیل: Jawidhashemi4@gmail.com

چکیده

پولینوم‌های نوع اول پافنوتی چبیشف^۱ به عنوان یکی از مهم‌ترین انواع پولینوم‌های چبیشف شناخته می‌شوند که نقش اساسی در ریاضیات و علوم کامپیوتر دارند، این پولینوم‌ها به خاطر ویژگی‌های منحصر به فرد خود، در تحلیل داده‌ها و حل مسائل عددی اهمیت خاصی دارند. پولینوم‌ها به خصوص در تخمین توابع و حل معادلات مشتقی، به عنوان ابزارهایی مؤثر برای کاهش خطا و بهبود دقت محاسبات شناخته می‌شوند. تاریخچه پولینوم‌های چبیشف، ریاضیدان برجسته روسی، بر می‌گردد به زمان‌های بسیار دور و به دوره اولیه ریاضیات که از آن زمان تاکنون، کاربردهای آن در حوزه‌های مختلف به خصوص در تحلیل عددی و پردازش سیگنال توسعه یافته است. اهمیت پولینوم‌های نوع اول چبیشف در توانایی ایجاد تقریب‌های دقیق و متعادل بودن فضای تابعی نهفته است. این پولینوم‌ها به روش‌های عددی مانند تجزیه و تحلیل فرکانسی، ادغام و تخمین توابع به کار گرفته می‌شوند. پولینوم‌ها به عنوان ابزارهایی برای بهبود دقت و کارایی مدل‌ها و الگوریتم‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این مقاله، به بررسی و تحلیل پولینوم‌های نوع اول چبیشف، از روش‌های تحلیلی و عددی استفاده شده است. ابتدا تعریف و ویژگی‌های این پولینوم‌ها را از منابع معتبر جمع‌آوری کردیم سپس به تحلیل خواص ریاضی این پولینوم‌ها که شامل روابط بازگشتی و ویژگی‌های جبری آن‌ها می‌باشد، پرداختیم. داده‌ها از کتاب‌ها، مقالات تحقیق و منابع اینترنتی معتبر استخراج شده و با استفاده از روش‌های ریاضی تحلیل و بررسی گردیده است. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که این پولینوم‌ها به دلیل ویژگی‌های خاصی که در ریاضیات و علوم کاربردی دارند، در تقریب توابع و حل مسائل مختلف ریاضی بسیار پرکارآمد هستند.

کلمات کلیدی: پولینوم، تقریب، چبیشف، مشتق، متعادل.

¹ Pafnuty Chebyshev

مقدمه

پولینوم‌های نوع اول^۲ چیشف، که به نام ریاضیدان روسی پافنوتی چیشف نامگذاری شده‌اند، یکی از موضوعات کلیدی در ریاضیات و علوم کامپیوتر به شمار می‌روند. این پولینوم‌ها به دلیل ویژگی‌های خاص خود، از جمله متعامد بودن و توانایی کاهش خطا، در طیف وسیعی از کاربرها مورد استفاده قرار می‌گیرند (زارعی، ۱۳۹۶). تاریخچه این پولینوم‌ها به قرن نوزدهم باز می‌گردد، زمانی که چیشف به بررسی خواص و کاربردهای آن‌ها در تخمین و تحلیل داده‌ها پرداخت. پولینوم‌های چیشف در زمینه‌های مختلفی از جمله تحلیل عددی، پردازش سیگنال^۳ و حل معادلات مشتقی کاربرد دارند. این پولینوم‌ها قابلیت ایجاد تقریب‌های دقیق را دارند و می‌توانند به عنوان ابزارهایی مؤثر برای بهبود دقت در محاسبات به کار روند. (نعمتی، ۱۳۹۵).

در این مقاله، به بررسی دقیق ویژگی‌ها، کاربردها و چالش‌های موجود در استفاده از پولینوم‌های نوع اول چیشف پرداخته شده است. هم‌چنین، نتایج تجربی و نظری این پولینوم‌ها در زمینه‌های مختلف مورد تحلیل قرار خواهد گرفت. این مقدمه به‌وضوح اهمیت و کاربردهای پولینوم‌های چیشف را نشان می‌دهد و زمینه را برای بررسی‌های بیشتر در مقاله فراهم می‌کند.

روش تحقیق

این تحقیق از نوع کتابخانه‌ای یعنی تحلیلی و عددی بوده و مطالب با استفاده از کتب معتبر علمی و مقالات تحقیقی از ژورنال‌های معتبر علمی جمع‌آوری شده است. برای اطمینان از دقت و اهمیت، از منابع به‌روز و مرتبط استفاده شده است.

تعریف: پولینوم‌های نوع اول چیشف

پولینوم‌های نوع اول چیشف، که با سمبول $T_n(x)$ نمایش داده می‌شوند، یک دنباله از پولینوم‌های هستند که به‌طور خاص در انتروال $[-1, 1]$ تعریف می‌شوند و ویژگی‌های

² Polynomials

³ Signal processing



متعامدی دارند. این پولینوم ها به صورت بازگشتی^۴ تعریف می شوند و به طور خاص برای تقریب توابع و حل مسائل عددی مورد استفاده قرار می گیرند. (پرتانیا، ۱۳۹۵).

تابع نوع اول پولینوم پافنوتی چبیشف

$$T_n(x) = \cos x$$

برای n ثابت پولینوم های نوع اول چبیشف به صورت زیر تعریف می شود:

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta),$$

به صورت $x = \cos \theta$ باشد

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (\text{Alkhamisi}, 2021)$$

به ازای $|x| \leq 1$ و $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ در ادامه نشان می دهیم که این تابع واقعاً یک پولینوم های جبری^۵ است.

برای $n = 0$ و $x = 1$ داریم

$$T_n(x) = \cos 0 = 1,$$

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x.$$

با قرار دادن $x = \cos \theta$ می توانیم روابط زیر را بنویسیم

$$T_1(t) = \cos(\arccos(\cos \theta)) = \cos \theta.$$

$$T_{n-1}(t) = \cos((n-1) \arccos(\cos \theta)) = \cos((n-1)\theta).$$

$$T_{n+1}(t) = \cos((n+1) \arccos(\cos \theta)) = \cos((n+1)\theta).$$

(Ahmed, 2023)

از آن جایی که

$$\begin{aligned} & \cos((n-1)\theta) + \cos((n+1)\theta) \\ &= 2 \cos \frac{(n-1)\theta + (n+1)\theta}{2} \cos \frac{(n-1)\theta - (n+1)\theta}{2} \\ &= 2 \cos \frac{2n\theta}{2} \cos \frac{(-2\theta)}{2} = 2 \cos(n\theta) \cos \theta \end{aligned}$$

(نعمتی فومشی، ۱۳۸۶).

⁴ Recurring

⁵ Algebraic polynomials

ریشه‌های پولینوم‌های نوع اول چیشف

ریشه‌های پولینوم‌های که به آن‌ها گره^۶ هم می‌گویند زمانی به دست می‌آید که $\cos \theta$

برابر به صفر شود یعنی (برای n های طبیعی):

$$x_t = \cos \frac{(2t-1)\pi}{2n}, \quad t = 1, 2, \dots, n,$$

و $\cos(n\theta)$

می‌توانیم رابطه بازگشتی زیر را برای پولینوم‌های نوع اول چیشف به دست آوریم

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad n \geq 1,$$

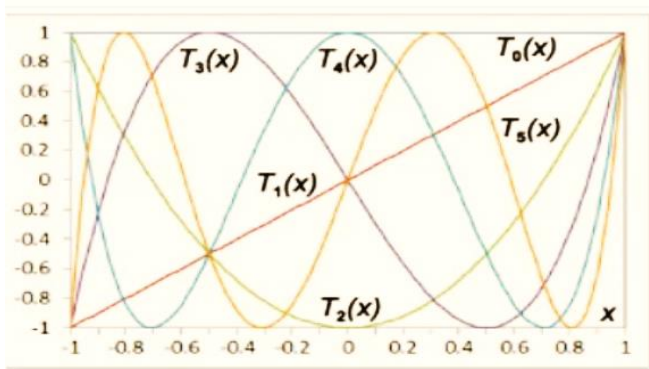
$$T_{n-1}(x) + T_{n+1}(x) = 2T_n(x)T_1(x),$$

$$\Rightarrow T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad (\text{Aloui, 2018})$$

که این رابطه بازگشتی با استفاده از رابطه مثلثاتی زیر به دست می‌آید:

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos\theta, \quad x = \cos\theta$$

(حیدری، ۱۳۹۸).



شکل ۱: پولینوم‌های نوع اول چیشف (نوری، ۱۳۹۵)

جدول ۱: پولینوم‌های نوع اول چیشف

N	$T_n(x)$
0	1
1	x
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$



5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$
6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$
7	$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$
8	$128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$
9	$256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$

منبع (هاشمی، ۱۳۹۸).

توجه کنید که ضرایب پولینوم هاي چیشف $T_n(x)$ ضرایب بسط مثلثاتی $\cos(n\theta)$ می باشد.

مثال ۱

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1,$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$

$$\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1, \quad (\text{Cesarano}, 2014)$$

پس، ضریب جمله پیشرو به کار رفته در $T_n(x)$ برابر با 2^{n-1} است، $T_n(x)$ را به -

صورت دیترمینانت مربعی زیر نشان می دهیم.

$$T_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2x \end{vmatrix}$$

توجه کنید پولینوم های نوع اول چیشف $T_n(x)$ در انتروال $[a, b]$ به صورت زیر است.

$$T_n^*(x) = T_n(y), \quad y = \frac{2}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2} \right), \quad n \geq 0, \quad (\text{نوری}, 1395).$$

ویژگی های پولینوم های نوع اول چیشف



متعامد بودن^۷: اگر ضرب اسکالری^۸ زیر را در نظر بگیریم که در آن پولینوم های نوع

اول چیشف در انتروال $[-1, 1]$ متعامد هستند، به این معنا که:

$$\langle T_k, T_i \rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_k(x)T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0,$$

آن گاه:

$$\langle T_k, T_i \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2} \pi \delta_{ij} & i \neq 0, j \neq 0 \\ \pi & i = j = 0 \end{cases} \quad (\text{Weisstein, 2003}).$$

در صورت که $i = j$ باشد $T_i(x) = \cos(i \arccos(x))$ می شود.

محدوده^۹: این پولینوم های دارای حداکثر مقدار ۱ و حداقل مقدار ۱- هستند و برای

هر n دارای n ریشه در انتروال $[-1, 1]$ هستند (زارعی، ۱۳۹۶).

پولینوم های نوع اول چیشف در تحلیل داده ها، پردازش سیگنال و حل معادلات

مشتقی کاربردهای گسترده ای دارند.

نتیجه گیری

پولینوم های نوع اول چیشف که به عنوان توابع چیشف شناخته می شوند، یکی از مهم-

ترین و پرکاربردترین ابزارها در ریاضیات و علوم کامپیوتر به شمار می آیند. این توابع،

به خصوص در زمینه های نظریه تقریب و تحلیل عددی، نقش کلیدی ایفا می کنند. ویژگی-

های منحصر به فرد پولینوم های چیشف، آن ها را به گزینه ای ایده آل برای مسائل مختلف

ریاضی تبدیل کرده است. یکی از ویژگی های بارز این توابع، توانایی آن ها در کاهش

خطای تقریب است. این خاصیت به خصوص در حالت هایی که نیاز به تقریب توابع

غیرخطی وجود دارد، بسیار حائز اهمیت است.

با استفاده از پولینوم های چیشف، می توان توابع پیچیده را با دقت بالا و با کمترین

خطا تقریب زد؛ بنابراین، رفتار نوسانی پولینوم های نوع اول چیشف در نزدیکی نقاط

⁷ Orthogonality

⁸ Internal multiplication

⁹ Range



انتهایی دامنه، باعث می شود که این توابع در حل مسائل مربوط به پخش بار و طراحی فیلترها بسیار مؤثر باشند. به عبارت دیگر، این توابع به ما این امکان را می دهند که در شرایط خاص، به دقت بیش تری دست یابیم و از بروز خطاهای احتمالی جلوگیری کنیم. پولینوم-های چبیشف هم چنین در زمینه های مختلفی از جمله انجینری الکترونیک و علوم داده کاربرد دارند. به عنوان مثال، در طراحی فیلترها، استفاده از این توابع به انجینران این امکان را می دهد که سیگنال های ورودی را به طور مؤثری پردازش کنند و از نویزهای ناخواسته کاسته شود. در نهایت، بررسی و تحلیل پولینوم های نوع اول چبیشف می تواند به درک عمیق تری از روش های مختلف تقریب و تحلیل عددی منجر شود.

این موضوع به خصوص در زمینه های علمی و انجینری، که نیاز به دقت و کارایی بالایی دارند، اهمیت ویژه ای پیدا می کند. با توجه به اینکه دنیای امروز به سمت داده های بزرگ و پیچیده حرکت می کند، درک و تسلط بر ابزارهایی مانند پولینوم های چبیشف می تواند به محققان و انجینران کمک کند تا راه حل های مؤثرتر برای چال های موجود ارائه دهند. در مجموع، پولینوم های نوع اول چبیشف به عنوان یک ابزار ریاضی قوی، نه تنها در نظریه، بلکه در عمل نیز تأثیرات عمیق و مثبتی در زمینه های مختلف ریاضیات دارند و مطالعه و بررسی آنها می تواند به پیشرفت های قابل توجهی منجر شود.



منابع

- پرتانیان، محمد علی، بیرانوند، زینب. (۱۳۹۵). حل معادله انتگرال آبل نوع اول توسط حسابان کسری با استفاده از چند جمله‌ای‌های چبیشف. مشهد: ششمین سمینار آنالیز عددی و کاربردهای آن.
- حیدری، محمد، برید لقمانی، قاسم. (۱۳۸۸). حل معادله انتقال نوترون در حالت پایا در یک بعد مربوط به نوترون‌های تک انرژی به کمک چند جمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم برای چشمه تیغ‌های در محیط نیمه بی‌نهایت. یزد: انتشارات دانشگاه یزد.
- زارعی، مهدی. (۱۳۹۶). تحلیل عددی. تهران: انتشارات دانشگاه صنعتی شریف.
- نعمتی فومشی، سمیه، اردوخانی، یدالله. (۱۳۸۶). یک کاربرد از چند جمله‌ای‌های چبیشف نوع اول برای معادلات انتگرال دیفرانسیل فردهم-همرشتاین. تهران: انتشارات دانشگاه صنعتی شریف.
- نوری، یوسف. (۱۳۹۵). ریاضیات عددی. تهران: انتشارات دانشگاه.
- هاشمی، جاوید. (۱۳۹۸). توابع اسپالین و دنباله خطاها در بهترین تقریب چندجمله‌ای‌ها. (تیزس دوره ماستری) یزد: انتشارات دانشگاه ملاصدرا.
- Abd-Elhameed, W. M., & Alkhamisi, S. O. (2021). New results of the fifth-kind orthogonal Chebyshev polynomials. *Symmetry*, 13(12), 2407.
- Ahmed, H. M. (2023). Numerical solutions for singular Lane-Emden equations using shifted Chebyshev polynomials of the first kind. *Contemporary Mathematics*, 132-149.
- Aloui, B. (2018). Chebyshev polynomials of the second kind via raising operator preserving the orthogonality. *Periodica Mathematica Hungarica*, 76, 126-132.
- Cesarano, C. (2014). Generalized chebyshev polynomials. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 43(5), 731-740.
- Weisstein, E. W. (2003). Chebyshev polynomial of the first kind. <https://mathworld.wolfram.com/>.



A Study of Polynomials of the First kind Pafnuty Chebyshev

Jawid Hashemi, Abdul Wares Sediqy, Mathematics Department,
Physics Department, Education faculty, Farah Higher Education
Institute

Email: Jawidhashemi4@gmail.com

Abstract

The first kind of Chebyshev polynomials, known as the Pafnuty Chebyshev polynomials, are recognized as one of the most important types of Chebyshev polynomials, playing a fundamental role in mathematics and computer science. These polynomials are particularly significant due to their unique characteristics, which make them important in data analysis and numerical problem-solving. Polynomials, especially in estimating functions and solving differential equations, are recognized as effective tools for reducing errors and improving computational accuracy. The history of Chebyshev polynomials dates back to the time of the prominent Russian mathematician Pafnuty Chebyshev and the early days of mathematics. Since then, their applications have developed in various fields, particularly in numerical analysis and signal processing. The importance of the first kind of Chebyshev polynomials lies in their ability to create accurate approximations and their orthogonality in functional space. These polynomials are employed in numerical methods such as frequency analysis, integration, and function estimation. In this paper, we examine and analyze the first kind of Chebyshev polynomials using both analytical and numerical methods. We first collected definitions and characteristics of these polynomials from reputable sources, then analyzed their mathematical properties, which include recurrence relations and algebraic features. Data were extracted from books, research articles, and credible internet sources, and analyzed using mathematical methods. The results of this research indicate that these polynomials, due to their specific characteristics in mathematics and applied sciences, are highly efficient in function approximation and solving various mathematical problems.

Keywords: Approximation, Chebyshev, Differential, Orthogonal, Polynomial