

روش‌های ماتریکسی الجبر خطی در تصاویر دیجیتالی: مرور

روایتی

پوهنیار احمدولی نوری^۱، پوهنمل فرهاد حکیمی^۲، پوهنیار محمد یزدان‌پرست^۳

رشته ریاضی، پوهنځی تعلیم و تربیه، پوهنتون فراه

ایمیل: ahmadwalinoori@farau.edu.af

چکیده

تصاویر دیجیتالی برای نمایش و تحلیل محاسباتی به ساختار عددی منظم نیاز دارند. هدف این تحقیق بررسی روش‌های ماتریکسی منتخب الجبر خطی در نمایش، صورت‌بندی عملیات و تحلیل ساختار معلومات تصاویر دیجیتالی است. تحقیق حاضر به روش مرور روایتی انجام شد و منابع علمی مرتبط منتشرشده در فاصله سال‌های ۲۰۱۶ تا ۲۰۲۴ به‌صورت هدفمند شناسایی و بررسی شدند. مرور حاضر بر سه محور اصلی شامل نمایش ماتریکسی تصاویر، تحلیل مؤلفه‌های اصلی (PCA) و تجزیه مقادیر منفرد (SVD) تمرکز دارد کاربردهای مرتبط آن‌ها در پردازش و تحلیل تصاویر نیز بررسی می‌شوند. نتایج مرور منابع نشان داد که این مفاهیم کارکردهای متفاوت اما مکمل دارند و انتخاب هر یک به ماهیت مسئله، ساختار تصویر، معیار خطا و امکانات محاسباتی وابسته است. در مدل‌هایی که پروسه تصویربرداری یا تخریب تصویر به‌صورت خطی بیان شود، مسئله بازسازی را می‌توان در قالب دستگاه معادلات خطی یا مسئله کمترین مربعات صورت‌بندی کرد و (SVD) می‌تواند در تحلیل رتبه، تشکیل شبه‌معکوس و بررسی مسائل کمترین مربعات نقش داشته باشد. با آن‌هم، تقریب با رتبه پایین و بازسازی تصویر از معلومات تخریب‌شده دو مسئله یکسان نیستند و کمینه‌بودن خطای عددی در یک معیار مشخص، برتری دیداری یا عملی یک روش را تضمین نمی‌کند. تحقیق حاضر شامل برنامه‌نویسی یا ارزیابی تجربی نبود. پیشنهاد می‌شود در تحقیقات آینده روش‌های بررسی‌شده بر مجموعه‌های مشخص تصاویر اجرا و از نظر کیفیت بازسازی، زمان اجرا و مصرف حافظه مقایسه شوند.

کلمات کلیدی: الجبر خطی، تصاویر دیجیتالی، تحلیل مؤلفه‌های اصلی، تجزیه مقادیر منفرد، روش‌های ماتریکسی.

Matrix-Based Linear Algebra Methods in Digital Images: A Narrative Review

Teaching Assistant Ahmad Wali Noori^{1*}, Senior Teaching Assistant Farhad Hakimi², Teaching Assistant Mohammad Yazdan Parast³

Abstract

Digital images require structured numerical representations for computational processing and analysis. This study aims to examine selected matrix-based methods of linear algebra for the representation, formulation of operations, and structural analysis of digital image data. The study was conducted as a narrative review, in which relevant scholarly sources published between 2016 and 2024 were identified and examined through a targeted literature search. The review focuses on three main themes: matrix representation of digital images, principal component analysis (PCA), and singular value decomposition (SVD), while also considering their related applications in image processing and analysis. The reviewed literature indicates that these concepts have distinct but complementary roles, and that the selection of an appropriate method depends on the nature of the problem, image structure, error criterion, and available computational resources. When the image formation or degradation process can be modeled as a linear operation, image reconstruction may be formulated as a system of linear equations or a least-squares problem, in which (SVD) can contribute to rank analysis, pseudoinverse construction, and least-squares analysis. However, low-rank approximation and image reconstruction from degraded observations are not identical problems, and minimizing numerical error under a specified criterion does not necessarily guarantee superior visual quality or practical performance. No programming implementation or empirical evaluation was conducted in the present study. Future research is recommended to evaluate the reviewed methods on well-defined image datasets in terms of reconstruction quality, computational time, and memory consumption.

Keywords: Digital images; Linear algebra; Matrix-based methods; Principal component analysis; Singular value decomposition.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

مقدمه

الحمد لله رب العالمين و الصلاة و السلام على سيدنا محمد و على آله و صحبه اجمعين
حمد و سپاس بی پایان خداوند متعال را سزااست که انسان را به دانش و اندیشه گرامی
داشت و راه شناخت و آبادانی جهان را برای او گشود. درود و سلام بر حضرت محمد
مصطفی (ص) پیام آور علم، هدایت و رحمت و برخاندان و یاران گرامی ایشان باد.

تصاویر دیجیتال یکی از اشکال مهم معلومات در علوم کامپیوتر، طب، سنجش از
دور، تشخیص الگو (Pattern Recognition) و سیستم های بینایی کامپیوتر
(Computer Vision) اند. هر تصویر پس از نمونه گیری مکانی و کمی سازی شدت، به
مجموعه ای منظم از مقادیر عددی تبدیل می شود. این مقادیر را می توان در قالب
ماتریکس ها، وکتورها یا آرایه های چندبُعدی نمایش داد. از این دید بخش مهمی از
تحلیل تصاویر دیجیتال بر مفاهیم الجبر خطی مانند ضرب ماتریکسی، تبدیل خطی،
مقدار مشخصه (Eigenvalue)، وکتور مشخصه (Eigenvector)، تجزیه مقادیر منفرد و
تقریب با رتبه پایین استوار است (Burger & Burge, 2022; Szeliski, 2022).

نمایش ماتریکسی تصویر میان مفاهیم نظری ریاضیات و عملیات محاسباتی علوم
کامپیوتر پیوند ایجاد می کند. تغییر مختصات هندسی را می توان با ضرب ماتریکسی بیان
کرد. فترهای محلی را می توان به صورت اوپراتورهای خطی و کانولوشن صورت بندی
نمود. مجموعه تصاویر یا وکتورهای ویژگی را می توان با تحلیل مؤلفه های اصلی بررسی
کرد. ساختار یک ماتریکس تصویر را می توان با تجزیه مقادیر منفرد و تقریب با رتبه
پایین تحلیل نمود. روش های ماتریکسی در داده کاوی (Data Mining) تشخیص الگو
و تحلیل معلومات با ابعاد زیاد جایگاه اساسی دارند (Eldén, 2019; Kanatani, 2021).

تحلیل مؤلفه های اصلی (Principal Component Analysis-PCA) یکی از
روش های شناخته شده کاهش بُعد است که متغیرهای تازه ای را به صورت ترکیب های خطی
ویژگی های اصلی ایجاد می کند. این مؤلفه ها از نظر کوواریانس نامرتبند و بر اساس
مقدار واریانس مرتب می شوند (Greenacre et al., 2022; Jolliffe & Cadima, 2021).

(2016). با آن هم، مؤلفه دارای واریانس بیشتر الزاماً مهم ترین مؤلفه برای یک هدف تشخیصی یا معنایی نیست و تفسیر نتیجه به تعریف نمونه ها و ویژگی ها وابسته است (Lever et al., 2017).

تجزیه مقادیر منفرد (Singular Value Decomposition-SVD) نیز یک تجزیه عمومی ماتریکس است که در تحلیل و تقریب با رتبه پایین تصاویر کاربرد دارد. تحقیقات مختلف از (SVD) و قیود رتبه در مسائلی مانند فشرده سازی، کاهش نویز (Noise Reduction)، بازسازی بخش های از دست رفته و ترکیب تصاویر استفاده کرده اند (Chen, 2018). کاربرد (SVD) در تحلیل و فشرده سازی تصویر را بررسی کرده است (Cammarasana & Patane, 2023). از یک روش یادگیری محور و قطعه مبنا در کنار (SVD) برای کاهش نویز استفاده کرده اند (Ma et al., 2024). مدل های قید رتبه ماتریکس را در بازسازی تصاویر دارای کاهش نویز ضربه ای مرور کرده اند. این نمونه ها نشان می دهند که روش های مبتنی بر رتبه پایین ظرفیت های متنوع دارند بناً نتیجه آن ها به مدل تصویر، معیار انتخاب مؤلفه ها و ساختار مسئله وابسته است. (PCA) و (SVD) در کاربردهای تخصصی نیز استفاده شده اند. برای نمونه، (Fragallah et al., 2021) از چارچوب (PCA) و (SVD) در ترکیب تصاویر طبی MRI و CT Scan استفاده کردند (Machidon et al., 2020). نیز روشی مبتنی بر (PCA) را برای تحلیل تصاویر ابرطیفی بررسی کردند. با وجود این کاربردها، نباید از یک مطالعه مشخص نتیجه گرفت که یک روش برای تمام تصاویر، ابعاد و اهداف مناسب است.

در منابع علمی موجود، مباحث نمایش ماتریکسی، تبدیل های هندسی، فلترگذاری، (PCA) و (SVD) معمولاً در منابع جداگانه و با اهداف متفاوت بررسی می شوند. در نتیجه، برای خواننده ممکن است تفاوت میان نوع مسئله ای که هر ابزار حل می کند، روشن نباشد. برای مثال، (PCA) و (SVD) از نظر محاسباتی مرتبط اند، اما هدف و تفسیر یکسان ندارند. همچنان، تبدیل خطی همراه با انتقال (affine transformation) و فلتر خطی هر دو از مفاهیم الجبر خطی استفاده می کنند، اما تبدیل خطی همراه با انتقال مختصات مکانی پیکسل ها را تغییر می دهد، در حالی که فلتر خطی بر مقادیر شدت پیکسل های همسایه عمل می کند.

هدف تحقیق حاضر، مرور روایتی و تحلیل مفهومی روش‌های ماتریکسی منتخب الجبر خطی در تصاویر دیجیتالی است. سؤال اصلی تحقیق چنین مطرح می‌شود: روش‌های ماتریکسی الجبر خطی چگونه در نمایش، تبدیل، فیلترگذاری، تحلیل ساختار و صورت‌بندی برخی مسائل بازسازی تصاویر دیجیتالی به کار می‌روند و ظرفیت‌ها و محدودیت‌های اصلی آن‌ها چیست؟ برای پاسخ به این سؤال، نمایش ماتریکسی و وکتوری، تبدیل‌های خطی و همراه با انتقال، عملیات نقطه‌ای و کانولوشن، (PCA)، (SVD)، تقریب با رتبه پایین و صورت‌بندی خطی برخی مسائل بازسازی تصویر بررسی و از نظر مبنای ریاضی و قلمرو کاربرد مقایسه می‌شوند.

روش تحقیق

تحقیق حاضر از نوع مرور روایتی (Narrative Review) است و با روش کتابخانه‌ای و مستند انجام شده است. هدف تحقیق تولید نتایج تجربی جدید نیست. در این تحقیق مفاهیم، روابط ریاضی، کاربردها و محدودیت‌های روش‌های ماتریکسی منتخب الجبر خطی در تصاویر دیجیتالی بر اساس منابع علمی موجود بررسی، تفسیر و به صورت مفهومی ترکیب شده‌اند. منابع مرتبط با محورهای تحقیق از طریق جست‌وجوی هدفمند شناسایی و بر اساس ارتباط مستقیم با موضوع تحقیق انتخاب شدند. این تحقیق مرور نظام‌مند (Systematic Review) یا فراتحلیل (Meta-analysis) نیست و ادعای پوشش جامع تمام مطالعات منتشرشده در این حوزه را ندارد.

منابع منتشرشده در فاصله سال‌های ۲۰۱۶ تا ۲۰۲۴ از طریق جست‌وجوی هدفمند بررسی شدند. عبارت‌های جست‌وجو شامل linear algebra in image processing، principal component matrix representation of digital images، low-rank approximation، singular value decomposition، analysis linear filtering و affine image transformation بودند. منابعی انتخاب شدند که با موضوع تحقیق ارتباط مستقیم داشتند، توضیح ریاضی یا محاسباتی ارائه می‌کردند و در کتاب‌های علمی، مجله‌ها یا مجموعه مقالات علمی معتبر منتشر شده بودند. منابعی

که تنها مطالب عمومی درباره تصاویر ارائه می کردند یا با سؤال اصلی تحقیق ارتباط مستقیم نداشتند، از تحلیل کنار گذاشته شدند.

محتوای منابع منتخب در سه محور مفهومی بررسی و سازمان دهی شد: نمایش تصاویر با استفاده از ماتریکس ها، وکتورها و آرایه های چندکاناله؛ صورت بندی عملیات تصویری مانند تبدیل های هندسی و فیلترهای خطی؛ و تحلیل ساختار ماتریکسی معلومات با استفاده از مقادارهای خاص، تحلیل مؤلفه های اصلی (PCA)، تجزیه مقادیر منفرد (SVD)، تقریب با رتبه پایین و صورت بندی خطی برخی مسائل بازسازی تصویر. در هر محور، تعریف ریاضی، کاربرد، نیازهای محاسباتی، محدودیت ها و ارتباط هر مفهوم با سایر روش ها بررسی شد.

یافته های مرور و تحلیل نظری

مبانی تصاویر دیجیتالی و نمایش ماتریکسی

تصویر دیجیتالی نتیجه نمونه گیری از یک میدان مکانی و کمی سازی مقادیر شدت است. در تصویر خاکستری، هر پیکسل معمولاً با یک مقدار عددی نمایش داده می شود. اگر تصویر دارای m سطر، n ستون و L سطح شدت باشد، می توان آن را به صورت ماتریکس زیر نوشت.

$$A = [a_{ij}] \in \{0, 1, \dots, L-1\}^{m \times n}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n \quad (1)$$

در این رابطه a_{ij} مقدار پیکسل واقع در سطر i و ستون j است. اگر هر پیکسل با b بیت نمایش داده شود، در حالت معیار $L = 2^b$ سطح عددی ممکن وجود دارد. با آن هم، نوع نمایش عددی ممکن است عدد صحیح، ممیز شناور یا قالب کمی سازی شده دیگری باشد از این رو، دامنه مقادیر باید متناسب با نوع تصویر و عملیات مورد نظر تعریف شود (Burger & Burge, 2022).

برای تصاویر رنگه RGB، هر موقعیت مکانی با سه مقدار مربوط به کانال های سرخ، سبز و آبی نمایش داده می شود.

$$C = (R, G, B), \quad R, G, B \in \{0, 1, \dots, L-1\}^{m \times n} \quad (2)$$

این نمایش را می‌توان یک آرایه سه‌بُعدی با ابعاد $m \times n \times 3$ نیز دانست. تصاویر چندطیفی، ابرطیفی و طبی ممکن است بیش از سه کانال داشته باشند بنابراین، نمایش RGB تنها یکی از حالت‌های نمایش چندکاناله است.

شاخص‌های سطر و ستون ماتریکس با مختصات هندسی تصویر کاملاً یکسان نیستند. در بسیاری از دستگاه‌های تصویری، مبدأ در گوشه بالایی قرار دارد و شاخص سطر به طرف پایین افزایش می‌یابد در حالی‌که در دستگاه دکارتی، محور عمودی معمولاً به طرف بالا در نظر گرفته می‌شود. این تفاوت در تعریف چرخش و نگاشت هندسی اهمیت دارد.

برای استفاده از روش‌هایی مانند (PCA)، یک تصویر یا وکتور خاص ممکن است به یک وکتور یک‌بُعدی تبدیل شود.

$$\text{vec}(A) \in \mathbb{R}^{mn} \quad (3)$$

ترتیب وکتورسازی باید ثابت و مشخص باشد برای نمونه، عناصر می‌توانند ستون‌به‌ستون یا سطر‌به‌سطر قرار گیرند. وکتورسازی مقادیر پیکسل‌ها را حذف نمی‌کند و در صورت معلوم بودن ترتیب و ابعاد، قابل برگشت است اما روابط همسایگی دو‌بُعدی را در ساختار وکتور به‌صورت آشکار نشان نمی‌دهد.

نمایش ماتریکسی زمینه اجرای عملیات نقطه‌ای، تبدیل‌های هندسی، کانولوشن و تجزیه‌های ماتریکسی را فراهم می‌کند. نمایش وکتوری نیز برای تشکیل مجموعه نمونه‌ها، محاسبه کوواریانس و اجرای روش‌های کاهش بُعد مناسب است. انتخاب نوع نمایش باید با هدف تحلیل و الگوریتم بعدی هماهنگ باشد (Eldén, 2019; Kanatani, 2021). این نمایش عددی، زمینه تعریف تبدیل‌های هندسی و عملیات محلی بر تصاویر را فراهم می‌سازد.

تبدیل‌های خطی و تبدیل‌های همراه با انتقال در تصاویر دیجیتالی

تبدیل‌های هندسی موقعیت نقاط تصویر را از یک سیستم مختصات به سیستم دیگر نگاشت می‌کند. اگر

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad p' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

مختصات نقطه پیش و پس از تبدیل باشند، یک تبدیل خطی دوبعدی چنین نوشته می شود

$$p' = Mp, \quad M \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (4)$$

تغییر مقیاس نسبت به مبدأ با ماتریکس قطری زیر بیان می شود

$$p' = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} p \quad (5)$$

در این رابطه s_x و s_y ضرایب مقیاس در دو جهت اند. اگر این دو ضریب برابر باشند مقیاس گذاری یکنواخت و در غیر آن مقیاس گذاری متفاوت است. چرخش در سیستم دکارتی با استفاده از وکتورهای ستونی و محور عمودی رو به بالا چنین نوشته می شود.

$$p' = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} p \quad (6)$$

در این رابطه زاویه مثبت نشان دهنده چرخش خلاف جهت عقربه های ساعت است. در تصاویر دیجیتالی که محور سطر به طرف پایین افزایش می یابد، جهت ظاهری چرخش ممکن است متفاوت باشد بنابراین، جهت محوره های دستگاه مختصات باید پیش از استفاده از این رابطه مشخص شود.

انتقال را نمی توان در مختصات دکارتی معمولی به صورت تبدیل خطی نوشت زیرا مبدأ را ثابت نگه نمی دارد. ترکیب یک تبدیل خطی با وکتور انتقال، تبدیل خطی همراه با انتقال را تشکیل می دهد.

$$p' = Mp + t, \quad t = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} \quad (7)$$

اگر $t = 0$ باشد، تبدیل همراه با انتقال به یک تبدیل خطی ساده تبدیل می شود. تبدیل خطی همراه با انتقال خط ها و توازی را حفظ می کند، اما طول ها و زاویه ها را عموماً حفظ نمی کند.

با استفاده از مختصات متجانس، تبدیل خطی همراه با انتقال را می توان به یک ضرب ماتریکسی تبدیل کرد.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & t_x \\ m_{21} & m_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

نمایش متجانس امکان ترکیب چند تبدیل را با ضرب ماتریکس‌ها فراهم می‌سازد. در صورت استفاده از وکتورهای ستونی، ماتریکس سمت راست زودتر بر نقطه اعمال می‌شود. از این رو، ترتیب ضرب‌ها باید با ترتیب مورد نظر تبدیل‌ها هماهنگ باشد. معادلات هندسی تنها مختصات پیوسته نقاط را تعیین می‌کنند. برای تشکیل تصویر خروجی، باید مقادیر پیکسل‌ها روی شبکه گسسته محاسبه شوند. نگاشت مستقیم ممکن است برخی موقعیت‌های خروجی را خالی بگذارد. به همین دلیل، در عمل معمولاً برای هر پیکسل خروجی، موقعیت متناظر آن در تصویر ورودی با نگاشت معکوس محاسبه می‌شود. اگر موقعیت محاسبه‌شده دقیقاً روی مرکز یک پیکسل قرار نگیرد، مقدار شدت با درونیابی تخمین زده می‌شود. روش‌های همسایه نزدیک، دوخطی و دومکعبی از روش‌های شناخته شده‌اند. همسایه نزدیک ساده و سریع است، اما ممکن است تغییرات پله‌ای ایجاد کند. درونیابی دوخطی از چهار پیکسل مجاور استفاده می‌کند و تغییرات نرم‌تری می‌سازد. درونیابی دومکعبی از همسایگی بزرگ‌تری استفاده می‌کند و هزینه محاسباتی بیشتری دارد. بنابراین، کیفیت تصویر تبدیل‌شده تنها به ماتریکس M وابسته نیست، بلکه نمونه‌گیری مجدد، روش درونیابی و قاعده برخورد با مرزها نیز بر نتیجه اثر می‌گذارند (Burger & Burge, 2022; Szeliski, 2022).

تبدیل‌های هندسی مختصات نقاط را تغییر می‌دهند. در مقابل، بخش بُعد عملیات‌هایی را بررسی می‌کند که مستقیماً بر مقادیر شدت پیکسل‌ها عمل می‌کنند.

عملیات ماتریکسی و فیلترهای خطی در تصاویر دیجیتال

پس از نمایش تصویر دیجیتال به شکل ماتریکس یا آرایه عددی، برخی عملیات مستقیماً بر مقادیر پیکسل‌ها اجرا می‌شوند. جمع و تفریق عنصر به عنصر دو تصویر زمانی از نظر ریاضی قابل تعریف است که ماتریکس‌های آن‌ها هم‌اندازه باشند. برای آن‌که حاصل تفریق به عنوان تفاوت محتوای تصویری تفسیر شود، تصاویر باید از نظر مکانی نیز هم‌تراز باشند.

در عملیات نقطه‌ای، مقدار هر پیکسل خروجی تنها به مقدار پیکسل متناظر در تصویر ورودی وابسته است و ساختار هندسی تصویر تغییر نمی‌کند (Burger & Burge, 2022).

(2022). یک تبدیل نقطه‌ای خطی همراه با انتقال شدت را می‌توان چنین صورت‌بندی کرد.

$$b_{ij} = Q(\alpha a_{ij} + \beta) \quad (9)$$

در این رابطه a_{ij} مقدار پیکسل ورودی، b_{ij} مقدار پیکسل خروجی، α ضریب مقیاس شدت، β مقدار جابه‌جایی شدت و Q اوپراتور روندآف و محدودسازی نتیجه به سطوح مجاز تصویر است. پارامتر α دامنه مقادیر شدت و β سطح عمومی آن‌ها را تغییر می‌دهد اما محدودسازی ممکن است سبب بریده‌شدن بخشی از مقادیر شود. رابطه $\alpha a_{ij} + \beta$ در حالت $\beta \neq 0$ تبدیل خطی همراه با انتقال است و اجرای Q نیز عموماً خاصیت خطی را حفظ نمی‌کند.

اگر $T: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ یک اوپراتور میان دو فضای وکتوری باشد، این اوپراتور زمانی خطی است که برای تصاویر A و B و اعداد حقیقی λ و μ ، رابطه زیر را برآورده سازد.

$$T(\lambda A + \mu B) = \lambda T(A) + \mu T(B) \quad (10)$$

در ناحیه داخلی تصویر، یک فلتر خطی با هسته ثابت را می‌توان از طریق کانولوشن دو بُعدی بیان کرد. حال اگر $A = [a_{ij}]$ تصویر ورودی و $H = [h_{uv}]$ هسته‌ای با ابعاد فرد $(2p+1) \times (2q+1)$ باشد، مقدار تصویر خروجی چنین تعریف می‌شود.

$$y_{ij} = (A * H)_{ij} = \sum_{u=-p}^p \sum_{v=-q}^q h_{uv} a_{i-u, j-v} \quad (11)$$

علامت‌های منفی در شاخص‌های تصویر سبب معکوس‌شدن هسته می‌شوند و کانولوشن را، در این شیوه شاخص‌گذاری، از همبستگی متقابل متمایز می‌سازند. اگر هسته نسبت به مرکز متقارن باشد، نتیجه کانولوشن و همبستگی متقابل می‌تواند یکسان باشد. در نزدیکی مرزها، برخی شاخص‌های معادله (۱۱) از محدوده ماتریکس خارج می‌شوند. برای تعریف این مقادیر می‌توان از افزودن صفر، انعکاس، تکرار مقدار مرزی یا امتداد دوره‌ای استفاده کرد. انتخاب قاعده مرزی بر پاسخ فلتر در کناره‌های تصویر اثر می‌گذارد و باید با هدف تحلیل هماهنگ باشد. فلترهای خطی هموارساز، تیزکننده و مشتق‌گیر بر اساس ضرایب هسته، پاسخ‌های متفاوتی تولید می‌کنند. هموارسازی تغییرات محلی شدت

را کاهش می‌دهد و ممکن است بخشی از کاهش نویز تصویر را نرم سازد. با آن‌هم می‌تواند مرزها و جزئیات کوچک را نیز کم‌رنج کند. فیلترهای مشتق‌گیر و برخی فیلترهای تیزکننده به تغییرات سریع شدت پاسخ می‌دهند و ممکن است در کنار مرزهای واقعی، به تغییرات ناشی از کاهش نویز تصویر نیز حساس باشند (Burger & Burge, 2022; Szeliski, 2022).

اگر جواب‌های مشتق با کانولوشن محاسبه شوند، هر جواب اولیه می‌تواند یک اوپراتور خطی باشد، اما تشخیص کامل لبه معمولاً مراحل غیرخطی مانند محاسبه اندازه گرادیان، آستانه‌گذاری و انتخاب شرطی پیکسل‌ها را نیز در بر می‌گیرد. بنابراین استفاده از یک فیلتر مشتق‌گیر خطی به معنای خطی بودن تمام پروسه تشخیص لبه نیست (Burger & Burge, 2022).

پس از وکتورسازی تصویر، کانولوشن با یک هسته ثابت و قاعده مرزی مشخص را می‌توان به شکل $y = Kx$ بیان کرد که در آن x و y وکتورهای تصویر ورودی و خروجی و K ماتریکس ساختاریافته اوپراتور است. این نمایش پیوند مستقیم کانولوشن با الجبر خطی را نشان می‌دهد. در اجرای عملی معمولاً کانولوشن بدون تشکیل صریح ماتریکس بزرگ K محاسبه می‌شود. همه روش‌های هموارسازی یا تحلیل محلی خطی نیستند. برای نمونه، فیلتر میانه و عملیات مبتنی بر مقایسه یا تصمیم‌گیری شرطی، شرط خطیت معادله (۱۰) را عموماً برآورده نمی‌کنند و خارج از تمرکز اصلی این مقاله قرار دارند.

علاوه بر عملیات محلی، در مجموعه‌ای از تصاویر یا وکتورهای ویژگی می‌توان ساختار کلی تغییرات معلومات را با روش‌های کاهش بُعد تحلیل کرد.

مقدار مشخصه، وکتور مشخصه و تحلیل مؤلفه‌های اصلی

پس از آن‌که مجموعه‌ای از تصاویر وکتورسازی شده یا وکتورهای خاص به صورت عددی نمایش داده شود، می‌توان از مفاهیم الجبر خطی برای شناسایی جهت‌های اصلی تغییرات و کاهش بُعد معلومات استفاده کرد. (PCA) متغیرهای تازه‌ای را به صورت ترکیب‌های خطی ویژگی‌های اصلی ایجاد می‌کند که از نظر کوواریانس نامرتبط اند و به ترتیب

واریانس بیشتری را توضیح می دهند (Greenacre et al., 2022; Jolliffe & Cadima, 2016).

اگر B یک ماتریکس مربعی باشد، وکتور خلاف صفر v و عدد λ زمانی به ترتیب وکتور مشخصه و مقدار مشخصه آن دانسته می شوند

$$Bv = \lambda v, \quad B \in \mathbb{R}^{d \times d}, \quad v \neq 0 \quad (12)$$

این رابطه نشان می دهد که B ، وکتور v را به مضربی از خودش نگاشت می کند. اگر $\lambda > 0$ باشد، جهت کلی وکتور حفظ می شود اگر $\lambda < 0$ باشد، جهت آن معکوس می گردد و اگر $\lambda = 0$ باشد، وکتور به وکتور صفر نگاشت می شود. تفسیر وکتور مشخصه ها به عنوان جهت های اصلی تغییرات، در (PCA) به ماتریکس کوواریانس مربوط است، نه به هر ماتریکس عمومی.

در تحقیق حاضر از رابط ستون محور استفاده می شود. اگر N نمونه و d ویژگی موجود باشد، ماتریکس معلومات چنین تعریف می شود.

$$X = [x_1, \dots, x_N] \in \mathbb{R}^{d \times N}, \quad x_i \in \mathbb{R}^d \quad (13)$$

هر ستون x_i یک نمونه و هر سطر یک ویژگی را نشان می دهد. اگر هر نمونه یک تصویر $m \times n$ وکتور سازی شده باشد، $d = mn$ است. (PCA) به مجموعه ای از نمونه ها و ویژگی ها نیاز دارد. بنابراین اگر تنها یک تصویر موجود باشد، باید مشخص شود که سطرها، ستون ها، قطعات تصویر یا ویژگی های استخراج شده چگونه به عنوان نمونه و متغیر تعریف می شوند. برای اجرای (PCA) مبتنی بر کوواریانس، اوسط نمونه ها محاسبه و از هر ستون کم می شود

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad X_c = X - \bar{x} 1_N^T \quad (14)$$

در این رابطه $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ وکتور متوسط، $1_N \in \mathbb{R}^N$ وکتور واحدها و $X_c \in \mathbb{R}^{d \times N}$ ماتریکس اوسط زدایی شده است. اگر هر ستون یک تصویر وکتور سازی شده باشد، $\bar{x}$ تصویر اوسط مجموعه را نشان می دهد. اگر ویژگی ها واحدها یا دامنه های بسیار متفاوت داشته باشند، می توان استاندارد سازی و (PCA) مبتنی بر ماتریکس همبستگی را بررسی

کرد. با آن هم این انتخاب نتیجه تحلیل را تغییر می دهد و باید بر اساس معنای ویژگی ها توجیه شود (Jolliffe & Cadima, 2016).

با فرض $N \geq 2$ ماتریکس کوواریانس نمونه ای برای رابطه ستون محور چنین محاسبه می شود.

$$S = \frac{1}{N-1} X_c X_c^T, \quad S \in \mathbb{R}^{d \times d} \quad (15)$$

ماتریکس S متقارن و نیمه مثبت است از این رو، مقدار مشخصه آن حقیقی و نامنفی اند و وکتور مشخصه های آن را می توان متعامد و با طول واحد انتخاب کرد. اگر وکتور مشخصه به صورت $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d \geq 0$ مرتب شوند، مقدار مشخصه متناظر با λ_1 جهت را مشخص می کند که واریانس فرافکنی نمونه های اوسط زدایی شده را حداکثر می سازد. وکتورهای مشخصه بعدی، با شرط تعامد، جهت هایی را تعیین می کنند که بیشترین واریانس باقی مانده را توضیح می دهند (Greenacre et al., 2022; Jolliffe & Cadima, 2016).

اگر

$$W_k = [w_1, \dots, w_k] \in \mathbb{R}^{d \times k}$$

شامل k وکتور ویژه نخست باشد، نمایش کم بُعد نمونه ها چنین به دست می آید

$$Z_k = W_k^T X_c, \quad Z_k \in \mathbb{R}^{k \times N} \quad (16)$$

هر ستون Z_k مختصات کم بُعد یک نمونه را نشان می دهد. کوواریانس مؤلفه های اصلی قطری است بنابراین، مؤلفه ها از نظر کوواریانس نمونه ای نامرتبط اند، اما این خاصیت به تنهایی استقلال احصائی کامل آن ها را تضمین نمی کند.

(PCA) می تواند برای کاهش یکتعداد ویژگی ها و نمایش مجموعه نمونه ها در جهت های دارای واریانس بیشتر استفاده شود؛ با آن هم، واریانس بیشتر الزاما ارزش تشخیصی، معنایی یا کاربردی بیشتر را نشان نمی دهد (Greenacre et al., 2022; Lever et al., 2017). (PCA) را می توان از طریق تجزیه مقدار مشخصه ماتریکس کوواریانس یا مستقیماً با تجزیه مقادیر منفرد ماتریکس اوسط زدایی شده محاسبه کرد. اگر $r = \text{rank}(X_c)$ باشد، تجزیه فشرده (SVD) چنین نوشته می شود

$$X_c = U_r \Sigma_r V_r^T, \quad \lambda_i = \frac{\sigma_i^2}{N-1}, \quad i = 1, \dots, r \quad (17)$$

در این رابطه

$$U_r \in \mathbb{R}^{d \times r}, \quad \Sigma_r \in \mathbb{R}^{r \times r}, \quad V_r \in \mathbb{R}^{N \times r}$$

در رابطه ستون محور مقاله، ستون های U_r جهت های اصلی (PCA) هستند و امتیازهای مؤلفه های اصلی از رابطه

$$U_r^T X_c = \Sigma_r V_r^T$$

به دست می آیند. استفاده مستقیم از (SVD) می تواند از تشکیل صریح ماتریکس کوواریانس جلوگیری کند. اما انتخاب روش محاسباتی به تعداد ویژگی ها، تعداد نمونه ها و یکتعداد مؤلفه های مورد نیاز وابسته است (Greenacre et al., 2022; Jolliffe & Cadima, 2016). معیار نمایش جدید را از ترکیب های خطی ویژگی ها می سازد و روابط غیرخطی را به صورت مستقیم مدل نمی کند. نتیجه آن به تعریف نمونه ها، اوسط زدایی، تصمیم درباره مقیاس بندی و تعداد مؤلفه های انتخاب شده وابسته است. وکتورسازی نیز مقادیر پیکسل ها را حذف نمی کند اما ساختار دوبعدی و روابط همسایگی را در نمایش وکتوری به صورت آشکار نشان نمی دهد. رابطه (PCA) با (SVD) زمینه بررسی تجزیه عمومی ماتریکس و تقریب با رتبه پایین را فراهم می سازد.

تجزیه مقادیر منفرد و تقریب ماتریکس تصویر با رتبه پایین

تجزیه مقادیر منفرد یکی از ابزارهای بنیادی الجبر خطی برای بررسی ساختار ماتریکس ها است. اگر $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ماتریکس یک تصویر خاکستری و $r = \text{rank}(A)$ باشد، شکل فشرده تجزیه مقادیر منفرد آن چنین نوشته می شود:

$$A = U_r \Sigma_r V_r^T = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T \quad (18)$$

در این رابطه

$$U_r \in \mathbb{R}^{m \times r}, \quad \Sigma_r \in \mathbb{R}^{r \times r}, \quad V_r \in \mathbb{R}^{n \times r},$$

و ستون های V_r و U_r متعامد و با طول واحداند

$$U_r^T U_r = I_r, \quad V_r^T V_r = I_r.$$

ماتریکس

$$\Sigma_r = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$$

مقادیر منفرد مثبت را در بر دارد که به صورت

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

مرتب می‌شوند. هر جمله $\sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T$ یک ماتریکس درجه یک است و وکتورهای منفرد،

پایه‌های متعامدی را برای فضاهاست ستونی و سطری ماتریکس فراهم می‌کند (Eldén,

2019; Kanatani, 2021).

با نگه داشتن k مقدار منفرد نخست، که در آن $1 \leq k \leq r$ ، ماتریکس زیر به دست

می‌آید

$$A_k = U_k \Sigma_k V_k^T = \sum_{i=1}^k \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \quad (19)$$

اگر $k = r$ باشد، $A_k = A$ و اگر $k < r$ باشد، A_k تقریب رتبه k ماتریکس اصلی A

است. انتخاب k تعیین می‌کند که چه تعداد از مؤلفه‌های (SVD) در نمایش کوتاه شده

حفظ شوند (Falini, 2022).

بر اساس قضیه بهترین تقریب با رتبه پایین، A_k در میان تمام ماتریکس‌های دارای رتبه

حداکثر k ، خطای نورم فروبنیوس را حداقل می‌سازد

$$\|A - A_k\|_F = \min_{\text{rank}(B) \leq k} \|A - B\|_F = \left(\sum_{i=k+1}^r \sigma_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

نورم فروبنیوس چنین تعریف می‌شود

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

اگر $1 \leq k < r$ و $\sigma_k > \sigma_{k+1}$ باشد، بهترین تقریب رتبه k یکتا است: اما در

صورت برابر بودن مقادیر منفرد در محل برش، کمینه‌کننده ممکن است یکتا نباشد.

خاصیت بهترین تقریب در معادله (۱۹) به نورم فروبنیوس مربوط است و به تنهایی درباره

حفظ ویژگی‌های دیداری، معنایی یا تشخیصی تصویر داوری نمی‌کند. اندازه یک مقدار

منفرد سهم عددی مؤلفه متناظر را در نورم ماتریکس نشان می‌دهد، اما مشخص نمی‌سازد

که آن مؤلفه نویز یا معلومات مفید تصویر است (Eldén, 2019; Kanatani, 2021).

در نمایش با رتبه پایین، عوامل U_k ، Σ_k و V_k در مجموع دارای شمار زیر از عناصر عددی اند

$$q_k = mk + k + nk = k(m + n + 1) \quad (21)$$

این شمار زمانی از mn عنصر ماتریکس اصلی کمتر است که $k(m + n + 1) < mn$ باشد. در این محاسبه فرض می شود که تنها k مقدار قطری Σ_k ذخیره می شوند. با آن هم، معادله ۲۰ فقط شمار مقادیر عددی را نشان می دهد و معادل اندازه واقعی فایل نیست. نوع عدد مورد استفاده برای ذخیره عوامل، کمی سازی، روند آف، ساختمان فایل و معلومات اضافی نیز بر حجم نهایی اثر می گذارند (Chen, 2018).

انتخاب رتبه k میان شمار عناصر نمایش و خطای عددی موازنه ایجاد می کند. کاهش k شمار عناصر را کم می سازد، اما خطای تقریب در نورم فروبنیوس را افزایش می دهد یا ثابت نگه می دارد. اثر این انتخاب بر کیفیت تصویر باید با معیاری متناسب با هدف تحلیل بررسی شود و مقدار ثابتی برای همه تصاویر و کاربردها وجود ندارد (Falini, 2022).

روش های مبتنی بر رتبه پایین در بعضی مسائل کاهش نویز نیز استفاده می شوند، اما نتیجه آن ها به مدل تصویر، ساختار کاهش نویز و شیوه انتخاب مؤلفه ها وابسته است. برای نمونه، (Cammarasana & Patane, 2023) تطبیق قطعات، (SVD) و آستانه های پیش بینی شده به وسیله یک مدل یادگیری را برای کاهش نویز تصاویر دوبعدی ترکیب کردند. از این کاربرد مشخص نمی توان نتیجه گرفت که مقادیر منفرد کوچک در هر تصویر یا در (SVD) مستقیم کل تصویر الزاما کاهش نویز اند.

در ماتریکس های بزرگ، روش های (SVD) کوتاه شده و الگوریتم های تصادفی با رتبه پایین با هدف تقریب زیر فضای مربوط به مؤلفه های مورد نیاز، بدون محاسبه تمام تجزیه، استفاده می شوند. سود محاسباتی و کیفیت تقریب آن ها به ابعاد ماتریکس، رتبه هدف، توزیع مقادیر منفرد، روش اجرا و معیار خطا وابسته است (Martinsson & Tropp, 2020).

در صورت اجرای جداگانه (SVD) بر سه کانال RGB، هر کانال مستقل از دو کانال دیگر تجزیه می شود؛ بنابراین، وابستگی میان کانال ها به صورت مستقیم در همان تجزیه

وارد نمی‌گردد. بررسی روش‌های چندکاناله و تانسوری خارج از محدوده تحقیق حاضر است.

در مجموع، (SVD) چارچوبی دقیق برای تجزیه ماتریکس و تشکیل تقریب با رتبه پایین فراهم می‌سازد. استفاده مناسب از آن نیازمند انتخاب توجیه‌شده رتبه، تفکیک خطای عددی از کیفیت کاربردی و توجه به هزینه واقعی محاسبه و ذخیره‌سازی است.

صورت‌بندی خطی مسئله بازسازی تصویر و ارتباط آن با (SVD)

در مسائل بازسازی تصویر، هدف برآورد تصویر اصلی از روی معلومات مشاهده‌شده یا تخریب‌شده است. اگر تصویر اصلی پس از وکتورسازی با $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ، معلومات مشاهده‌شده با $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ، اپراتور خطی تصویربرداری یا تخریب با $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ و خطای مشاهده یا نویز با $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^m$ نشان داده شوند، در حالتی که پروسه تصویربرداری یا تخریب خطی باشد، مدل مشاهده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{b} = H\mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (22)$$

در این رابطه، $\mathbf{x}$ وکتور مجهول مربوط به تصویر اصلی، H ماتریکس نمایش‌دهنده اپراتور خطی سیستم، $\mathbf{b}$ معلومات مشاهده‌شده و $\mathbf{e}$ خطا یا نویز است. بازیابی $\mathbf{x}$ از روی $\mathbf{b}$ و معلومات مربوط به H ، یک مسئله معکوس تصویری را تشکیل می‌دهد. با این حال، همه مسائل بازسازی تصویر الزاماً خطی نیستند و معادله (۲۱) تنها برای حالتی معتبر است که رابطه میان تصویر اصلی و معلومات مشاهده‌شده با یک اپراتور خطی مدل شود (López-Tapia et al., 2021).

اگر اثر نویز در مدل ساده‌شده نادیده گرفته شود، رابطه (۲۱) به دستگاه خطی $H\mathbf{x} = \mathbf{b}$ تبدیل می‌شود. در معلومات واقعی ممکن است دستگاه دقیقاً قابل حل نباشد یا به دلیل ساختار H نسبت به خطا حساس باشد. در چنین حالتی، یکی از صورت‌بندی‌های اساسی، مسئله کمترین مربعات است:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|H\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \quad (23)$$

بنابراین، در مدل‌هایی که پروسه تصویربرداری یا تخریب خطی فرض می‌شود، مسئله بازسازی می‌تواند به یک دستگاه معادلات خطی یا مسئله کمترین مربعات تبدیل شود اما این نتیجه را نمی‌توان به تمام روش‌های بازسازی تصویر تعمیم داد.

اگر شکل فشرده تجزیه مقادیر منفرد H برابر با

$$H = U_r \Sigma_r V_r^T$$

باشد، شبه معکوس مورینوز آن از رابطه $H^+ = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T$ به دست می آید. در این چارچوب، یک حل کمترین مربعات با کمترین نورم را می توان چنین نوشت:

$$\hat{x} = H^+ b = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T b \quad (24)$$

از این دید، (SVD) تنها برای تقریب ماتریکس با رتبه پایین کاربرد ندارد، بلکه در تحلیل رتبه، تشکیل شبه معکوس و حل مسائل کمترین مربعات نیز نقش دارد. اگر بعضی مقادیر منفرد بسیار کوچک باشند، معکوس سازی آن ها می تواند حساسیت حل نسبت به خطاهای موجود در معلومات را افزایش دهد از این رو، تفسیر و استفاده از شبه معکوس باید با توجه به وضعیت عددی مسئله انجام شود.

تقریب یک ماتریکس تصویر با رتبه پایین و بازسازی تصویر از معلومات تخریب شده دو مسئله یکسان نیستند. در مسئله نخست، هدف جایگزین کردن ماتریکس موجود A با یک تقریب دارای رتبه پایین تر است در حالی که در مسئله بازسازی، تصویر مجهول x باید از معلومات مشاهده شده b و مدل سیستم H برآورد شود. (SVD) می تواند در هر دو چارچوب استفاده شود، اما هدف ریاضی و تفسیر نتیجه در آن ها متفاوت است. تحقیق حاضر این روابط را صرفاً از دید نظری بررسی می کند و هیچ الگوریتم بازسازی تصویر را به صورت تجربی اجرا نمی کند (Kanatani, 2021).

جمع بندی و مقایسه کارکردی مفاهیم و روش های الجبر خطی

در چارچوب تحلیلی تحقیق حاضر، کاربردهای الجبر خطی در تصاویر دیجیتالی در سه سطح مرتبط قرار می گیرند: نمایش عددی، صورت بندی عملیات و تحلیل ساختار ماتریکسی یا احصائیوی. مفاهیم بررسی شده از یک نوع و سطح نیستند؛ از این رو، مقایسه آن ها به معنای رتبه بندی یا جانشینی مستقیم یک روش با روش دیگر نیست، بلکه قلمرو کاربرد، ظرفیت، محدودیت و نیاز هر کدام را روشن می سازد.

نمایش ماتریکسی و وکتوری، مبنای عددی سایر محاسبات را فراهم می کند. نمایش ماتریکسی، ترتیب دو بُعدی پیکسل ها را به صورت آشکار نشان می دهد؛ در حالی که

وکتورسازی همان مقادیر را در یک ترتیب یک‌بُعدی قرار می‌دهد و برای تشکیل ماتریکس نمونه‌ها و برخی روش‌های احصائیوی مناسب است. وکتورسازی معلومات پیکسل‌ها را حذف نمی‌کند، اما روابط همسایگی دو‌بُعدی را مستقیماً در ساختار وکتور نشان نمی‌دهد.

در سطح عملیات، تبدیل‌های خطی و خطی همراه با انتقال تغییرات مختصاتی مانند چرخش، تغییر مقیاس، انعکاس، برش هندسی و انتقال را بیان می‌کنند. تشکیل تصویر خروجی علاوه بر ماتریکس تبدیل، به نمونه‌گیری مجدد و درونیابی وابسته است. فیلترهای خطی در مقابل، بر مقادیر محلی پیکسل‌ها عمل می‌کنند و نتیجه آن‌ها به ضرایب هسته، اندازه همسایگی و قاعده مرزی وابسته است (Burger & Burge, 2022; Szeliski, 2022).

در سطح تحلیل ساختار، (PCA) و (SVD) وظایف متفاوت دارند. (PCA) برای تحلیل و کاهش بُعد مجموعه‌ای از نمونه‌های اوسط‌زدایی شده استفاده می‌شود و جهت‌ها را بر اساس واریانس مرتب می‌کند. (SVD) تجزیه‌ای عمومی برای یک ماتریکس است و می‌تواند برای تشکیل تقریب با رتبه پایین، محاسبه (PCA) ماتریکس اوسط‌زدایی شده، تحلیل رتبه و تشکیل شبه‌معکوس در برخی مسائل خطی استفاده شود. بنابراین، ارتباط محاسباتی (PCA) و (SVD) به معنای یکسان بودن هدف و تفسیر آن‌ها نیست (Jolliffe & Cadima, 2016; Kanatani, 2021). در جدول ۱ تفاوت کارکرد، ظرفیت، محدودیت و نیاز اصلی مفاهیم بررسی شده را خلاصه می‌کند. این جدول مقایسه عملکرد تجربی نیست زیرا روش‌ها در تحقیق حاضر بر تصاویر واقعی اجرا و با معیارهای عددی ارزیابی نشده‌اند.

جدول ۱: مقایسه کارکردی مفاهیم و روش های اصلی الجبر خطی در تصاویر دیجیتالی

ردیف	مفهوم یا روش	مبنای ریاضی	قلمرو اصلی کاربرد	ظرفیت اصلی	محدودیت مهم	شرط یا نیاز اصلی
۱	نمایش ماتریکسی و وکتوری	تنظیم مقادیر پیکسل ها در قالب ماتریکس یا وکتور	نمایش عددی تصویر و آماده سازی برای محاسبات بعدی	فراهم ساختن ساختار منظم برای عملیات الجبر خطی	وکتورسازی ساختار دوبعدی همسایگی را به صورت آشکار نشان نمی دهد	مشخص بود ن ابعاد، ترتیب عناصر، تعداد کانال ها و نوع نمایش عددی
۲	تبدیل های خطی - انتقالی	ضرب ماتریکسی و وکتور انتقال	چرخش، تغییر مقیاس، انعکاس، برش هندسی و انتقال	بیان و ترکیب منظم تغییرات مختصاتی	کیفیت تصویر خروجی تنها به ماتریکس تبدیل وابسته نیست	تعیین رابطه مختصات، پارامترهای تبدیل، نگاشت و روش درونیابی
۳	کانولوشن و فیلترهای خطی	ترکیب وزن دار مقادیر همسایگی با هسته ثابت	هموارسازی خطی، تیزسازی و تولید جواب ها	تحلیل منظم تغییرات محلی پیکسل ها	احتمال کمرنگ شدن جزئیات یا حساسیت	انتخاب هسته، اندازه همسایگی و قاعده

ی مرتبط	به کاهش	برخورد با
با مرزها	نویز	مرزها
کاهش	نمایش	خطی بودن
تجزیه	مقدارمشخ	۴
بُعد و	صه و	مجموعه
تحلیل	ماتریکس (PCA)	مجموعه
تغییرات	کوواریانس یا	نمونه‌ها،
مجموعه	(SVD)	تعریف
نمونه‌ها	ماتریکس	نمونه‌ها،
اوسط‌زدایی ش	اوسط‌زدایی	ویژگی‌ها و
ده	مقیاس	انتخاب
بر اساس	مرتب شده	تعداد
واریانس	مؤلفه‌ها	
تجزیه	تحلیل رتبه،	رتبه
ماتریکس	تشکیل	انتخاب رتبه
تشکیل	تقریب با	یا شیوه
تقریب با	رتبه پایین و	استفاده از
رتبه پایین	محاسبه	مؤلفه‌ها و
و تحلیل	شبه معک	توجه به
برخی	وس در	وضعیت
مسائل	مدل‌های	عددی
خطی و	خطی	مسئله
کمترین	مقادیر	
مربعات	منفرد	
	کوچک	

منبع: (Burger & Burge, 2022; Chen, 2018; Falini, 2022; Jolliffe & Cadima, 2016; Kanatani, 2021; Martinsson & Tropp, 2020)

مناقشه

بر اساس ترکیب مفهومی منابع در تحقیق حاضر، روش‌های ماتریکسی الجبر خطی در تصاویر دیجیتال در سه سطح مرتبط بررسی می‌شوند: نمایش عددی، اجرای عملیات و تحلیل ساختار معلومات. سطح نمایش، تنظیم مقادیر تصویر در قالب ماتریکس یا وکتور را در بر می‌گیرد. سطح عملیات شامل دو شاخه متفاوت است: تبدیل‌های هندسی که

مختصات نقاط را تغییر می دهند و فیلترهای خطی که بر مقادیر محلی پیکسل ها عمل می کنند. سطح تحلیل ساختار نیز مفاهیمی مانند مقدار مشخصه، (PCA)، (SVD)، تقریب با رتبه پایین و، در برخی مدل های خطی، صورت بندی مسائل بازسازی را شامل می شود. این چارچوب، جمع بندی تحلیلی نویسندگان از منابع است و به عنوان طبقه بندی نقل شده از یک منبع واحد ارائه نمی شود.

در سطح نمایش، ماتریکس ترتیب دو بُعدی و روابط همسایگی پیکسل ها را به صورت آشکار نشان می دهد. وکتورسازی همان مقادیر را بر اساس یک ترتیب ثابت در یک ساختار یک بُعدی قرار می دهد و برای تشکیل ماتریکس نمونه ها و برخی محاسبات احصائیوی مناسب است اما ساختار مکانی را مستقیماً وارد تحلیل نمی کند، مگر آن که روش مورد استفاده آن را جداگانه مودل کند. بنابراین، انتخاب نوع نمایش تنها یک تغییر فورمت نیست، بلکه باید با عملیات یا روش تحلیل بُعدی هماهنگ باشد (Eldén, 2019; Kanatani, 2021).

در سطح عملیات، تبدیل های خطی و همراه با انتقال مختصات هندسی نقاط را تعیین می کنند، اما تشکیل تصویر خروجی به نمونه گیری مجدد و درونیابی نیز وابسته است. فیلترهای خطی در مقابل، مقادیر محلی پیکسل ها را بر اساس هسته و قاعده مرزی تغییر می دهند. از این رو، تبدیل هندسی و فلترگذاری وظایف متفاوتی دارند و جانشین مستقیم یکدیگر نیستند. همچنان، صورت بندی خطی یک اوپراتور به تنهایی کیفیت تصویر خروجی را تضمین نمی کند. زیرا نتیجه عملی به دستگاه مختصات، روش درونیابی، ضرایب هسته و قاعده مرزی نیز وابسته است (Burger & Burge, 2022; Szeliski, 2022).

در سطح تحلیل ساختار، (PCA) و (SVD) با وجود رابطه نزدیک ریاضی، هدف و تفسیر یکسان ندارند. (PCA) یک چارچوب احصائیوی برای تحلیل واریانس مجموعه نمونه ها است، در حالی که (SVD) تجزیه ای عمومی برای یک ماتریکس است. اجرای (SVD) بر ماتریکس اوسط زدایی شده می تواند جهت ها و امتیازهای (PCA) را فراهم سازد اما این ارتباط محاسباتی به معنای یکسان بودن دو روش نیست (Greenacre et al., 2022; Jolliffe & Cadima, 2016). صورت بندی مسئله بازسازی تصویر نیز نشان

می‌دهد که نقش (SVD) باید بر اساس نوع مسئله تفکیک شود. در تقریب با رتبه پایین، هدف جایگزین کردن یک ماتریکس موجود با تقریب دارای رتبه پایین‌تر است. در حالی که در یک مسئله معکوس خطی، هدف برآورد تصویر مجهول از روی معلومات مشاهده‌شده و اوپراتور سیستم است. در مدل‌های خطی، این مسئله می‌تواند به دستگاه معادلات یا مسئله کمترین مربعات منجر شود و (SVD) از طریق تحلیل رتبه و تشکیل شبه معکوس در بررسی حل نقش داشته باشد. بنابراین، کاربرد (SVD) در تقریب با رتبه پایین و کاربرد آن در بازسازی خطی مرتبطانند، اما از نظر هدف ریاضی یکسان نیستند (Kanatani, 2021; López-Tapia et al., 2021).

مؤلفه‌های (PCA) بر اساس واریانس مرتب می‌شوند، اما واریانس بیشتر الزاماً ارزش معنایی، تشخیصی یا کاربردی بیشتر را نشان نمی‌دهد. در (SVD) نیز اندازه مقدار منفرد سهم عددی مؤلفه متناظر را در نورم ماتریکس بیان می‌کند و به‌تنهایی مشخص نمی‌سازد که آن مؤلفه نویز یا معلومات مفید تصویر است. بنابراین، انتخاب مؤلفه‌ها باید با هدف تحلیل و معیار ارزیابی هماهنگ باشد. تقریب کوتاه‌شده (SVD)، خطای رتبه‌محدود را در نورم فروبنیوس کمینه می‌سازد. اما این معیار مجموع مربعات اختلاف عناصر را اندازه‌گیری می‌کند و مستقیماً میزان حفظ مرزها، بافت‌ها یا ویژگی‌های مورد نیاز یک کاربرد را نمی‌سنجد. از این رو، کمینه‌بودن خطای عددی در یک معیار مشخص باید از مطلوبیت دیداری یا تشخیصی تفکیک شود (Eldén, 2019; Kanatani, 2021). در منابع منتخب تحقیق حاضر، انتخاب تعداد مؤلفه‌ها یا رتبه (k) به یک مقدار ثابت برای همه مسائل محدود نشده است و به ساختار معلومات، هدف تحلیل، معیار خطا و سطح فشردگی مورد نیاز وابسته است (Falini, 2022).

کاهش ابعاد تصاویر می‌تواند شمار عملیات مراحل بعدی را کم کند، اما محاسبه (PCA) یا (SVD) خود هزینه محاسباتی دارد. در مسائل بزرگ، روش‌های کوتاه‌شده و تصادفی برای تقریب مؤلفه‌ها یا زیرفضای مورد نیاز استفاده می‌شوند با آن‌هم، کیفیت و هزینه آن‌ها به ابعاد ماتریکس، رتبه هدف، توزیع مقادیر منفرد و روش اجرا وابسته است (Martinson & Tropp, 2020). بنابراین، کاهش ابعاد نباید بدون در نظر گرفتن هزینه مرحله تجزیه، معادل کاهش قطعی زمان یا حافظه دانسته شود. اجرای روش‌های

ماتریکسی در حساب ممیز شناور انجام می شود از این رو، دقت عددی، الگوریتم تجزیه و ارزیابی خطا در اعتمادپذیری نتیجه اهمیت دارند. الگوریتم های دقت مختلط می توانند میان سرعت، حافظه و دقت موازنه ایجاد کنند، اما استفاده از آن ها نیازمند تحلیل خطا و توجه به شرایط مسئله است (Higham & Mary, 2022). مقاله حاضر این الگوریتم ها را اجرا نکرده است و تنها اهمیت عمومی ملاحظات عددی را در کاربرد (PCA) و (SVD) یادآور می شود.

نتیجه تحلیل حاضر آن است که انتخاب ابزار باید از سؤال مسئله آغاز شود. برای تغییر مختصات هندسی، تبدیل های خطی و همراه با انتقال مناسب اند. برای تحلیل محلی مقادیر پیکسل ها، فیلترهای خطی کاربرد مستقیم تری دارند. (PCA) برای کاهش بُعد مجموعه نمونه ها و (SVD) برای تجزیه یا تقریب با رتبه پایین یک ماتریکس به کار می روند. در برخی مسائل بازسازی دارای مدل خطی نیز صورت بندی دستگاه یا مسئله کمترین مربعات و ابزارهایی مانند شبه معکوس می توانند کاربرد داشته باشند. در مسائل مرکب چند ابزار می توانند نقش های مکمل داشته باشند، اما ترکیب و ترتیب آن ها باید بر اساس طراحی همان مسئله توجه شود. از دید آموزشی، پیوند میان ماتریکس ها، تبدیل های خطی، مقدار مشخصه و تصاویر دیجیتالی می تواند برای توضیح کاربرد مفاهیم الجبر خطی در علوم کمپیوتر مورد استفاده قرار گیرد (Eldén, 2019; Kanatani, 2021). با آن هم، تحقیق حاضر تأثیر این روش را بر یادگیری محصلان، کیفیت تدریس یا نصاب پوهنتون ها ارزیابی نکرده است. بنابراین، این موضوع یک اثر یادگیری احتمالی است، نه یافته تجربی مقاله.

با توجه به ماهیت مرور روایتی، منابع بر اساس ارتباط مستقیم آن ها با محورهای تحقیق به صورت هدفمند انتخاب شدند و مقاله ادعای پوشش جامع تمام منابع علمی موجود را ندارد. روش های بررسی شده نیز بر تصاویر واقعی اجرا نشده اند و معیارهای ارزیابی تجربی مانند PSNR، SSIM، MSE، زمان اجرا و مصرف حافظه در تحقیق حاضر محاسبه نشده اند. از این رو، مقاله درباره برتری تجربی روش ها داوری نمی کند. تحقیقات آینده می توانند روش های بررسی شده را بر مجموعه های مشخص تصاویر اجرا کنند و رابطه میان انتخاب مؤلفه ها، کیفیت بازسازی، حفظ جزئیات و هزینه محاسباتی را ارزیابی نمایند.

نتیجه گیری

نتایج این مرور روایتی نشان داد که روش های ماتریکسی الجبر خطی در تصاویر دیجیتالی کارکردهای اساسی و مکملی در نمایش عددی، صورت بندی عملیات و تحلیل ساختار معلومات دارند. نمایش ماتریکسی و وکتوری مبنای این محاسبات را فراهم می کند، در حالی که (PCA) و (SVD) به ترتیب در تحلیل ساختار نمونه ها، کاهش بُعد، تجزیه ماتریکس و تقریب با رتبه پایین نقش دارند و (SVD) در برخی مدل های خطی بازسازی نیز می تواند برای تحلیل رتبه، تشکیل شبه معکوس و بررسی مسائل کمترین مربعات به کار رود. مقایسه مفهومی منابع نشان می دهد که هیچ یک از این روش ها به صورت مستقل برای همه مسائل تصویری مناسب نیست و انتخاب آن ها به ماهیت مسئله، ساختار تصویر، تعریف نمونه ها، معیار خطا و امکانات محاسباتی وابسته است. همچنین، کاهش بُعد یا رتبه و کمینه کردن خطای عددی لزوماً به حفظ بهتر جزئیات یا کیفیت دیداری بالاتر منجر نمی شود، از این رو، تفسیر نتایج باید با توجه به هدف کاربرد انجام شود. با توجه به ماهیت نظری این مرور، پیشنهاد می شود در تحقیقات آینده روش های بررسی شده بر مجموعه های مشخص تصاویر و تحت معیارهای یکسان از نظر کیفیت بازسازی، حفظ جزئیات، زمان اجرا و مصرف حافظه به صورت تجربی ارزیابی و مقایسه شوند.

منابع

- Burger, W., & Burge, M. J. (2022). *Digital Image Processing: An Algorithmic Introduction*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-05744-1>
- Cammarasana, S., & Patane, G. (2023). Learning-based low-rank denoising. *Signal, Image and Video Processing*, 17(2), 535–541. <https://doi.org/10.1007/s11760-022-02258-4>
- Chen, Z. (2018). Singular Value Decomposition and its Applications in Image Processing. *Proceedings of the 2018 1st International Conference on Mathematics and Statistics*, 16–22. <https://doi.org/10.1145/3274250.3274261>
- Eldén, L. (2019). *Matrix Methods in Data Mining and Pattern Recognition, Second Edition*. Society for Industrial and Applied Mathematics. <https://doi.org/10.1137/1.9781611975864>
- Falini, A. (2022). A review on the selection criteria for the truncated (SVD) in Data Science applications. *Journal of Computational Mathematics and Data Science*, 5, 100064. <https://doi.org/10.1016/j.jcmds.2022.100064>
- Faragallah, O. S., Muhammed, A. N., Taha, T. S., & Geweid, G. G. N. (2021). (PCA) based (SVD) fusion for MRI and CT medical images. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 41(2), 4021–4033. <https://doi.org/10.3233/JIFS-202884>
- Greenacre, M., Groenen, P. J. F., Hastie, T., D’Enza, A. I., Markos, A., & Tuzhilina, E. (2022). Principal component analysis. *Nature Reviews Methods Primers*, 2(1), 100. <https://doi.org/10.1038/s43586-022-00184-w>
- Higham, N. J., & Mary, T. (2022). Mixed precision algorithms in numerical linear algebra. *Acta Numerica*, 31, 347–414. <https://doi.org/10.1017/S0962492922000022>
- Jolliffe, I. T., & Cadima, J. (2016). Principal component analysis: A review and recent developments. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 374(2065), 20150202. <https://doi.org/10.1098/rsta.2015.0202>
- Kanatani, K. (2021). *Linear Algebra for Pattern Processing: Projection, Singular Value Decomposition, and Pseudoinverse*. Springer

- International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-02544-0>
- Lever, J., Krzywinski, M., & Altman, N. (2017). Principal component analysis. *Nature Methods*, 14(7), 641–642. <https://doi.org/10.1038/nmeth.4346>
- López-Tapia, S., Molina, R., & Katsaggelos, A. K. (2021). Deep learning approaches to inverse problems in imaging: Past, present and future. *Digital Signal Processing*, 119, 103285. <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2021.103285>
- Ma, S., Li, Z., Chu, F., Fang, S., Yang, W., & Li, L. (2024). Review of Matrix Rank Constraint Model for Impulse Interference Image Inpainting. *Electronics*, 13(3), 470. <https://doi.org/10.3390/electronics13030470>
- Machidon, A. L., Del Frate, F., Picchiani, M., Machidon, O. M., & Ogrutan, P. L. (2020). Geometrical Approximated Principal Component Analysis for Hyperspectral Image Analysis. *Remote Sensing*, 12(11), 1698. <https://doi.org/10.3390/rs12111698>
- Martinsson, P.-G., & Tropp, J. A. (2020). Randomized numerical linear algebra: Foundations and algorithms. *Acta Numerica*, 29, 403–572. <https://doi.org/10.1017/S0962492920000021>
- Szeliski, R. (2022). *Computer Vision: Algorithms and Applications*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-34372-9>