



تحلیل مروری پایداری سیستم‌های غیرخطی بر اساس روش مستقیم

لیاپانوف

پوهنیار محمد یزدان پرست^{۱*}، پوهنمل فرهاد حکیمی^۱، پوهنیار احمدولی نوری^۲

رشته ریاضی، پوهنځی تعلیم و تربیه، پوهنتون فراه

ایمیل: m.afghan7272@gmail.com

چکیده

سیستم‌های غیرخطی در بسیاری از پدیده‌های ریاضی، انجینری، فزیک و جمعیتی دیده می‌شوند. بررسی پایداری این سیستم‌ها برای فهم رفتار آن‌ها در نزدیکی حالت تعادل اهمیت جدی دارد، به خصوص زمانی که حل صریح معادلات تفاضلی آسان یا در دسترس نیست. این تحقیق با روش مروری-تحلیلی، پایداری سیستم‌های غیرخطی را بر اساس روش مستقیم لیاپانوف بررسی می‌کند. تمرکز مقاله بر مفهوم تابع لیاپانوف، مثبت معین بودن آن، رفتار مشتق تابع در امتداد مسیرهای سیستم، دشواری ساخت تابع مناسب، روش‌های جدید محاسباتی و چند مثال ساده کاربردی است. معلومات تحقیق از منابع معتبر منتشرشده پس از سال ۲۰۱۵ جمع‌آوری شده و بخش‌هایی مانند نظریه پایداری، کنترل غیرخطی، سیستم‌های مرتبه کسری، شبکه‌های عصبی، روش‌های بهینه‌سازی و همچنان مودل‌های جمعیتی و اپیدمیولوژیک دربر می‌گیرد. بررسی انجام‌شده نشان می‌دهد که روش مستقیم لیاپانوف بدون حل صریح معادلات، امکان داوری درباره پایداری، پایداری مجانبی و در شرایط قوی‌تر پایداری نمایی را فراهم می‌سازد. با آن‌هم، یافتن تابع لیاپانوف مناسب هنوز بخش دشوار این روش است و همین دشواری زمینه گسترش روش‌های محاسباتی، یادگیری ماشین و توابع لیاپانوف کنترولی را فراهم کرده است. نتیجه مقاله آن است که روش مستقیم لیاپانوف، با وجود محدودیت‌های عملی، هنوز برای تحلیل و آموزش پایداری سیستم‌های غیرخطی جایگاه مهم دارد.

کلمات کلیدی: پایداری، پایداری مجانبی، تابع لیاپانوف، روش مستقیم لیاپانوف، سیستم‌های غیرخطی



A Review Analysis of the Stability of Nonlinear Systems Based on Lyapunov's Direct Method

Mohammad Yazanparast, Farhad hakimi, Ahmad Wali Noori

Abstract

Nonlinear systems appear in many mathematical, engineering, physical, and population-related phenomena. Their stability analysis is important for understanding system behavior near equilibrium, especially when explicit solutions of the differential equations are difficult or unavailable. This article presents an analytical review of nonlinear system stability based on Lyapunov's direct method. The study focuses on the Lyapunov function, its positive definiteness, the behavior of its derivative along system trajectories, the difficulty of constructing a suitable function, recent computational approaches, and several simple illustrative examples. The study relies on reliable sources published after 2015, covering stability theory, nonlinear control, fractional-order systems, neural networks, optimization and methods, and also population and epidemiological models. The review shows that Lyapunov's direct method can assess stability, asymptotic stability, and, under stronger assumptions, exponential stability without explicitly solving the system equations. Nevertheless, constructing a suitable Lyapunov function remains the most difficult part of the method, which has motivated the development of computational methods, machine-learning approaches, and control Lyapunov functions. The article concludes that Lyapunov's direct method, despite its practical limitations, remains important for both the analysis and teaching of nonlinear system stability.

Keywords: Asymptotic stability, Lyapunov direct method, Lyapunov function, Nonlinear systems, Stability



مقدمه

الحمد لله رب العالمين و الصلاة و السلام على سيدنا محمد و على آله و صحبه اجمعين. حمد و سپاس بی پایان خداوند متعال را سزااست که انسان را به دانش و اندیشه گرامی داشت و راه شناخت و آبادانی جهان را برای او گشود. درود و سلام بر حضرت محمد مصطفی (ص) پیام آور علم، هدایت و رحمت و برخاندان و یاران گرامی ایشان باد.

در بسیاری از پدیده های طبیعی و تخنیکی، رابطه میان متحول ها ساده و خطی نیست. اصطکاک، اشباع، قیود فزیک، وابستگی متقابل متحول ها و بازخوردهای پیچیده سبب می شوند که رفتار یک سیستم فقط با مودل های خطی توضیح داده نشود. از همین جهت، سیستم های غیرخطی در ریاضیات کاربردی، معادلات تفاضلی، فزیک، انجینری، مودلسازی جمعیتی و اپیدمیولوژیک و همچنان نظریه کنترل جایگاه مهمی دارند. در ادبیات جدید کنترل غیرخطی نیز تحلیل پایداری بر بنیاد توابع لیپانوف یکی از ابزارهای اصلی برای فهم رفتار چنین سیستم ها شمرده می شود (Bernal et al., 2022; Khalil, 2021).

پایداری از سوالات بنیادی در مطالعه سیستم های دینامیکی است. وقتی سیستم از حالت تعادل اندکی دور شود، باید دانست که مسیر آن در نزدیکی تعادل باقی می ماند، دوباره به تعادل برمی گردد یا از آن دور می شود. این سوال در طراحی کنترل، مدارهای الکتریکی، سیستم های میخانیکی و مودل های جمعیتی فقط جنبه نظری ندارد، بلکه با قابلیت اعتماد و رفتار عملی سیستم نیز پیوند دارد. در منابع جدید، پایداری لیپانوف، پایداری مجانبی و پایداری نمایی همچنان سه مفهوم اصلی برای تحلیل نقاط تعادل سیستم های دینامیکی اند (Bernal et al., 2022; Khalil, 2021).

روش مستقیم لیپانوف برای بررسی همین مسئله به کار می رود. در این روش، به جای آن که جواب صریح معادلات تفاضلی پیدا شود، تابعی مناسب بر حالت های سیستم انتخاب می گردد و تغییر آن در طول مسیرهای سیستم مطالعه می گردد. اگر این تابع مانند یک اندازه انرژی، فاصله یا انحراف از تعادل عمل کند، می توان از رفتار آن درباره پایداری نتیجه گرفت. همین ایده در سال های اخیر در سیستم های مرتبه کسری، سیستم های دارای

میرایی کسری، طراحی کنترل و واریسی خودکار توابع لیپانوف نیز به کار رفته است (Hinze et al., 2020; Tuan & Trinh, 2018; Voßwinkel & Röbenack, 2023).

دشواری اصلی این روش در انتخاب تابع مناسب است. برای برخی سیستم‌ها، تابع انرژی یا یک تابع درجه دوم ساده کافی است؛ اما در بسیاری از سیستم‌های غیرخطی، چنین انتخابی به سادگی ممکن نیست. همین مسئله باعث شده است که تحقیقات جدید به روش‌های محاسباتی، ساختارهای نوع ماسرا، شبکه‌های عصبی عمیق، روش‌های مجموع مربعات، توابع لیپانوف - مانع و رویکردهای بهینه‌سازی توجه کنند (Dawson et al., 2023; Doban & Lazar, 2018; Grüne, 2021; Jones et al., 2023).

بر همین بنیاد، تحقیق حاضر پایداری سیستم‌های غیرخطی را با تمرکز بر روش مستقیم لیپانوف بررسی می‌کند. سوال اصلی تحقیق چنین است: روش مستقیم لیپانوف چگونه می‌تواند بدون حل صریح معادلات تفاضلی، پایداری سیستم‌های غیرخطی را تحلیل کند؟ برای جواب دادن به این سوال، اول روش تحقیق توضیح داده می‌شود؛ سپس مبانی پایداری، روش مستقیم لیپانوف، محدودیت‌های آن و چند مثال ساده بررسی می‌گردد؛ و در پایان، بحث و نتیجه‌گیری ارائه می‌گردد.

روش تحقیق

این تحقیق از نظر ماهیت، مروری - تحلیلی و از نظر شیوه جمع‌آوری معلومات، کتابخانه‌ای است. در این تحقیق دیتای لابراتواری جدید جمع‌آوری نشده و هیچ تجربه لابراتواری، شبیه‌سازی عددی مستقل یا اندازه‌گیری ساحوی انجام نشده است. هدف مقاله، گردآوری و تحلیل مفهومی منابع جدید و معتبر درباره پایداری سیستم‌های غیرخطی و روش مستقیم لیپانوف است.

منابع استفاده شده همگی پس از سال ۲۰۱۵ نشر شده‌اند. معیار انتخاب منابع چنین بوده است: ارتباط مستقیم با پایداری، سیستم‌های غیرخطی، تابع لیپانوف، روش مستقیم لیپانوف، روش‌های محاسباتی، کنترل غیرخطی و نشر از سوی ناشر معتبر علمی، کنفرانس معتبر یا ژورنال داوری شده. به همین دلیل، منابع قدیمی در فهرست نهایی

نیامده‌اند، هرچند بعضی مفاهیم تاریخی، مانند اصل ناوردایی لا سال، به دلیل جایگاه نظری خود در متن باقی مانده‌اند.

تحلیل منابع به‌صورت مفهومی و مقایسه‌ای انجام شده است. نخست مفاهیم سیستم دینامیکی، نقطه تعادل، پایداری لیاپانوف، پایداری مجانبی و پایداری نمایی بررسی شد. سپس شرایط تابع لیاپانوف، رفتار مشتق آن و دشواری ساخت تابع مناسب تحلیل گردید. بعد تحقیقاتی بررسی شد که به شیوه‌های جدید ساخت و ارزیابی تابع لیاپانوف پرداخته‌اند؛ از جمله روش‌های محاسباتی، ساختارهای نوع ماسرا، شبکه‌های عصبی، توابع تقریباً لیاپانوفی، روش مجموع مربعات، توابع لیاپانوف کنترولی و کاربردهای جمعیتی و اپیدمیولوژیک. (Cangiotti et al., 2024; Doban & Lazar, 2018; Gaby et al., 2022; Li et al., 2023; Liu et al., 2020).

مثال‌های تحقیق برای اثبات قضایای تازه آورده نشده‌اند؛ هدف آن‌ها روشن کردن منطق روش مستقیم لیاپانوف است. از همین سبب، مثال‌ها ساده و قابل پی‌گیری با محاسبه دستی انتخاب شده‌اند تا رابطه میان سیستم، تابع لیاپانوف و نتیجه پایداری روشن بماند.

یافته‌ها و تحلیل نظری

مبانی نظری سیستم‌های غیرخطی و پایداری

یک سیستم دینامیکی تغییر حالت یک پدیده را در طول زمان بیان می‌کند. اگر حالت سیستم با وکتور $x(t)$ نمایش داده شود، یک سیستم پیوسته و خودمختار را می‌توان چنین نوشت:

$$\dot{x} = f(x)$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ وکتور حالت و f ساحه وکتوری سیستم است. در این تحقیق، نقطه بالای متحول، مانند $\dot{x}$ ، مشتق نسبت به زمان را نشان می‌دهد. هرگاه $f(x_e) = 0$ باشد، نقطه x_e نقطه تعادل است؛ یعنی اگر سیستم از آن نقطه آغاز شود، در همان حالت باقی می‌ماند (Bernal et al., 2022; Khalil, 2021).

اگر سیستم به شک $\dot{x} = Ax$ ل نوشته شود و اصل جمع‌پذیری و تجانس در آن برقرار باشد، سیستم خطی است. اما وقتی جملات ضربی، توان‌های بالاتر، توابع مثلثاتی، اشباع یا روابط پیچیده‌تر وارد مودل شوند، سیستم غیرخطی می‌شود. در سیستم‌های غیرخطی

ممکن است چند نقطه تعادل، رفتارهای محلی متفاوت و محدودیت‌های جدی برای خطی‌سازی به وجود آید. بناءً، تحلیل آن‌ها معمولاً به ابزارهایی نیاز دارد که ساختار غیرخطی سیستم را حفظ کنند (Bernal et al., 2022; Voßwinkel & Röbenack, 2023). برای تحلیل پایداری معمولاً با تغییر متحول $z = x - x_e$ ، مسئله به بررسی پایداری مبدأ منتقل می‌شود. پایداری به مفهوم لیپانوف به این معناست که اگر حالت ابتدایی به اندازه کافی به تعادل نزدیک باشد، مسیر سیستم برای همه زمان‌های آینده در مجاورت تعادل باقی بماند. باید متوجه بود که این تعریف فقط نزدیک ماندن را تضمین می‌کند و لزوماً به معنای برگشت به تعادل نیست (Khalil, 2021).

پایداری مجانبی زمانی مطرح می‌شود که تعادل پایدار باشد و تمام مسیرهای نزدیک به آن، در نهایت به تعادل برسند؛ یعنی $x(t) \rightarrow x_e$ وقتی $t \rightarrow \infty$. پایداری نمایی شکل قوی‌تری از پایداری است؛ زیرا افزون بر تقرب مسیرها به تعادل، سرعت این تقرب را نیز با یک حد نمایی بیان می‌کند:

$$\|x(t) - x_e\| \leq M e^{-\alpha t} \|x(0) - x_e\|$$

که در آن $M \geq 1$ و $\alpha > 0$ ثوابت مثبت‌اند. این نوع پایداری در کنترل اهمیت دارد، چون فقط رسیدن به تعادل مطرح نیست؛ سرعت کاهش خطا نیز مهم است (Bernal et al., 2022; Khalil, 2021).

روش مستقیم لیپانوف

روش مستقیم لیپانوف یکی از راه‌های اصلی تحلیل پایداری در سیستم‌های غیرخطی است. نقطه قوت این روش آن است که برای داوری درباره پایداری، حل صریح معادلات تفاضلی لازم نیست. به جای حل سیستم، تابعی بر حالت‌های آن انتخاب می‌شود و رفتار این تابع در امتداد مسیرهای سیستم بررسی می‌گردد. همین ایده در منابع جدید، هم در سیستم‌های کلاسیک و هم در سیستم‌های مرتبه کسری و دارای میرایی کسری، ادامه یافته است (Hinze et al., 2020; Tuan & Trinh, 2018; Voßwinkel & Röbenack, 2023).

برای سیستم خودمختار $\dot{x} = f(x)$ ، با فرض $f(0) = 0$ ، تابع $V(x)$ زمانی می‌تواند تابع لیپانوف باشد که در ناحیه مورد نظر، $V(0) = 0$ و برای $x \neq 0$ ، $V(x) > 0$ باشد. چنین تابعی مثبت‌معین (Positive Definite) است. در بسیاری از موارد، V را می‌توان مانند اندازه‌ای برای فاصله از تعادل، انرژی یا میزان انحراف سیستم تفسیر کرد. در سیستم‌های

میکانیکی، بعضی اوقات انتخاب تابع از انرژی سیستم الهام می‌گیرد؛ اما در سیستم‌های پیچیده‌تر، یافتن تابع مناسب به شناخت بسیار دقیق ساختار ریاضی مدل نیاز دارد (Bernal et al., 2022; Khalil, 2021).

پس از انتخاب V ، مرحله مهم محاسبه مشتق آن در امتداد مسیرهای سیستم است. اگر V مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن چنین نوشته می‌شود:

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x)f(x)$$

در این رابطه $\dot{V}$ ، مشتق زمانی تابع لیپانوف در طول حرکت سیستم است. اگر $\dot{V}$ کاهش یک کمیت مثبت معین را نشان دهد، می‌توان از آن برای تحلیل پایداری استفاده کرد. به بیان ساده‌تر، اگر سیستم در طول زمان مقدار یک کمیت انرژی‌مانند را از دست بدهد، مسیرها به رفتار پایدار نزدیک‌تر می‌شوند.

نتیجه‌گیری اصلی چنین است: اگر V مثبت معین باشد و $\dot{V} \leq 0$ در مجاورت تعادل برقرار گردد، تعادل پایدار به مفهوم لیپانوف است. اگر افزون بر آن، $\dot{V} < 0$ برای همه $x \neq 0$ برقرار باشد، تعادل مجانباً پایدار خواهد بود. ارزش این نتیجه در آن است که بدون حل صریح سیستم، رفتار کیفی مسیرها قابل بررسی می‌شود (Bernal et al., 2022; Khalil, 2021).

با این حال، حالت $\dot{V} \leq 0$ همیشه برای اثبات پایداری مجانبی کافی نیست. اگر مشتق فقط منفی نیمه معین باشد، ممکن است مسیرها در مجموعه‌ای باقی بمانند که در آن $\dot{V} = 0$ است. در چنین مواردی، اصل ثابت ماندن لا سال یا صورت‌های تعمیم‌یافته آن برای تحلیل دقیق‌تر به کار می‌رود. در کارهای جدید نیز ایده ثابت ماندن در گسترش روش مستقیم برای سیستم‌های پیچیده‌تر، به‌ویژه سیستم‌های دارای میرایی کسری، دیده می‌شود (Hinze et al., 2020; Khalil, 2021).

پایداری نمایی با شرایط قوی‌تر به دست می‌آید. اگر تابع لیپانوف از بالا و پایین با عبارت‌های درجه دوم نسبت به

$\|x\|$ محدود شود و مشتق آن شرطی مانند

$$\dot{V} \leq -c \|x\|^2$$

را برآورده سازد، می‌توان درباره مقارب نمایی نتیجه گرفت. در چنین حالتی، روش لیپانوف علاوه بر نوع پایداری، درباره سرعت مقارب نیز معلومات می‌دهد (Bernal et al., 2022; Khalil, 2021).

مزایا، محدودیت‌ها و چالش‌های روش مستقیم لیپانوف

نخستین مزیت روش مستقیم لیپانوف این است که نیاز به حل صریح سیستم را کم می‌کند. برای بسیاری از سیستم‌های غیرخطی، یافتن جواب تحلیلی دشوار است و گاهی اصلاً برای فهم پایداری لازم نیست. روش لیپانوف توجه را از حل معادله به ساختار خود سیستم منتقل می‌کند. همین تغییر نگاه سبب شده است که این روش در ریاضیات کاربردی و کنترل غیرخطی همچنان کاربرد داشته باشد (Khalil, 2021; Voßwinkel & Röbenack, 2023).

مزیت دیگر آن پیوند با طراحی کنترل است. در کنترل غیرخطی جدید، تابع لیپانوف کنترلی برای بیان هدف پایداری استفاده می‌شود. در سال‌های اخیر، این مفهوم در کنار تابع مانع کنترلی قرار گرفته و برای ترکیب پایداری و ایمنی در سیستم‌های سیستم‌های غیرخطی افاین، یعنی سیستم‌هایی که نسبت به ورودی کنترل ساختار خطی دارند به کار رفته است (Dawson et al., 2023; Li et al., 2023).

محدودیت مهم روش این است که بیشتر شرایط آن کافی‌اند، نه لازم. اگر تابع لیپانوف مناسب پیدا شود، پایداری قابل اثبات است؛ اما اگر چنین تابعی پیدا نشود، نمی‌توان فوراً گفت سیستم ناپایدار است. در همین نقطه، توابع تقریباً لیپانوفی و روش‌های محاسباتی اهمیت پیدا می‌کنند، زیرا نشان می‌دهند که تحلیل پایداری همیشه به شکل ساده و کلاسیک کاهش یکنواخت یک تابع محدود نمی‌ماند (Doban & Lazar, 2018; Grüne, 2021; Liu et al., 2020).

یافتن تابع مناسب در سیستم‌های ساده آسان‌تر است، به‌ویژه وقتی مودل ساختار انرژی محور یا بعد پایین داشته باشد. اما در سیستم‌های پربعد، کوپل‌شده یا دارای قیود، توابع درجه دوم ساده همیشه جواب نمی‌دهند. برای همین، روش‌هایی مانند ساخت توابع نوع ماسرا، تقریب با شبکه‌های عصبی عمیق، شبکه‌های عصبی لیپانوف، مجموع

مربعات و حذف کمیت نما در ادبیات جدید مطرح شده اند (Doban & Lazar, 2018; Gaby et al., 2022; Grüne, 2021; Jones et al., 2023; Voßwinkel & Röbenack, 2023).

در بعضی رده های خاص سیستم ها، شکل تابع لیاپانوف نیز خاص تر می شود. برای نمونه، در سیستم های یکنواخت، توابع ماگزیمم تفکیک پذیر برای تحلیل پایداری و اثر تاخیرهای زمانی به کار رفته اند. این موضوع نشان می دهد که روش لیاپانوف فقط یک قالب ثابت نیست؛ بلکه بسته به نوع سیستم، ابزار و صورت بندی مناسب خود را پیدا می کند (Feyzmahdavian et al., 2018).

مثال های کاربردی

برای نشان دادن منطق روش مستقیم لیاپانوف، سه مثال ساده بررسی می شود. هدف از این مثال ها ارائه قضیه تازه نیست؛ بلکه روشن ساختن نحوه انتخاب تابع لیاپانوف و نوع نتیجه گیری درباره پایداری است.

مثال اول: سیستم اسکالر $\dot{x} = -x^3$

این مثال از نظر ساختار بسیار ساده است، اما برای فهم روش لیاپانوف ارزش آموزشی دارد. نقطه تعادل از شرط $f(x) = 0$ به دست می آید و برابر با $x^* = 0$ است. تابع زیر را در نظر می گیریم

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2$$

V مثبت معین است، زیرا $V(0) = 0$ و برای هر $x \neq 0$ ، $V(x) > 0$. مشتق آن در امتداد مسیرهای سیستم چنین است

$$\dot{V}(x) = x\dot{x} = x(-x^3) = -x^4$$

برای هر $x \neq 0$ ، مقدار $\dot{V}(x) < 0$ است. بنابراین، تعادل مبدأ پایدار مجانبی است. چون این نتیجه در تمام خط حقیقی برقرار می ماند، پایداری مجانبی در این مثال ماهیت سراسری دارد. اهمیت مثال در آن است که بدون حل صریح معادله، می توان با یک تابع ساده رفتار پایداری سیستم را تشخیص داد (Khalil, 2021).

مثال دوم: آونگ میرا

آونگ میرا نمونه مناسبی برای نشان دادن نقش انرژی در روش لیاپانوف است. مدل حالت آن را می توان چنین نوشت

$$\dot{\theta} = \omega, \quad \dot{\omega} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta - c\omega, \quad c > 0$$

تعالادل پایین آونگ در $(0,0) = (\theta, \omega)$ قرار دارد. تابع انرژی مانند زیر را در نظر می‌گیریم

$$V(\theta, \omega) = \frac{1}{2} \omega^2 + \frac{g}{\ell} (1 - \cos \theta)$$

درمجاورت تعادل پایین، این تابع مثبت معین است؛ البته ناحیه تحلیل باید طوری انتخاب شود که تعادل‌های دیگر ناشی از تناوب زاویه را شامل نگردد. مشتق تابع در امتداد مسیرهای سیستم چنین به دست می‌آید

$$\dot{V} = \omega \dot{\omega} + \frac{g}{\ell} \sin \theta \dot{\theta} = \omega \left(-\frac{g}{\ell} \sin \theta - c\omega \right) + \frac{g}{\ell} \sin \theta \omega = -c\omega^2 \leq 0.$$

در این مثال، $\dot{V}$ منفی نیمه معین است. از همین رو، برای نتیجه‌گیری درباره پایداری مجانبی باید از تحلیل تکمیلی استفاده کرد. با اصل ثابت ماندن لا سال، چون بزرگ‌ترین مجموعه ثابت در $\dot{V} = 0$ همان تعادل $(0,0)$ است، تعادل پایین آونگ درمجاورت $(0,0)$ به صورت محلی پایدار مجانبی خواهد بود. این مثال نشان می‌دهد که در سیستم‌های مکانیکی، منفی نیمه معین بودن مشتق تابع لیپانوف می‌تواند با تحلیل ثابت ماندن به نتیجه قوی‌تری برسد (Khalil, 2021).

مثال سوم: مودل جمعیتی لجستیک

روش لیپانوف به سیستم‌های میخانیکی یا کنترولی محدود نیست. برای نمونه، مودل لجستیک زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right), \quad r > 0, K > 0$$

در این مودل، N اندازه جمعیت و K ظرفیت رنج محیط است. دو نقطه تعادل سیستم $N = 0$ و $N = K$ می‌باشند. برای بررسی تعادل مثبت $N = K$ ، تابع زیر را انتخاب می‌کنیم

$$V(N) = \frac{1}{2} (N - K)^2$$

این تابع نسبت به تعادل $N = K$ مثبت معین است. مشتق آن در امتداد مسیرهای سیستم چنین محاسبه می‌شود

$$\dot{V} = (N - K) \dot{N} = (N - K) rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) = -\frac{r}{K} N (N - K)^2$$

در مودل جمعیتی، ناحیه $N > 0$ ناحیه طبیعی و معنادار سیستم است؛ بنابراین نتیجه پایداری نیز در همین ناحیه بیان می‌شود. برای هر $N > 0$ و $N \neq K$ ، مقدار $\dot{V} < 0$ است.

پس تعداد $N = K$ ل در ناحیه مثبت پایدار مجانبی است. این مثال نشان می‌دهد که منطق روش لیپانوف در مدل‌های جمعیتی نیز قابل استفاده است، به‌ویژه زمانی که هدف فهم رفتار تعادل‌ها باشد. در ادبیات جدید مدل‌های جمعیتی و اپیدمیولوژیک نیز توابع لیپانوف برای تحلیل پایداری سیستم‌های مبتنی بر معادلات تفاضلی به‌گونه گسترده استفاده شده‌اند (Cangiotti et al., 2024).

این سه مثال هر کدام جنبه‌ای از روش مستقیم لیپانوف را روشن می‌سازند. در مثال اسکالر، منفی معین بودن مشتق تابع به‌طور مستقیم پایداری مجانبی را نشان می‌دهد. در آونگ میرا، مشتق منفی نیمه معین است و اصل ثابت مانده لا سال نقش تعیین‌کننده می‌گیرد. در مدل لجستیک، همان منطق در بستری غیرمیخانیکی به کار می‌رود. بدین ترتیب، مثال‌ها فقط محاسبات ساده نیستند؛ بلکه نشان می‌دهند که روش مستقیم لیپانوف چگونه از ریاضیات نظری به مدل‌های کاربردی انتقال می‌یابد.

مثال چهارم: مدل‌های اپیدمیولوژیک

برای نشان دادن کاربرد روش مستقیم لیپانوف در مدل‌های اپیدمیولوژیک، مدل ساده SIS در نظر گرفته می‌شود. در این مدل، افراد پس از بهبودی مصونیت پایدار به‌دست نمی‌آورند و دوباره وارد گروه حساس می‌شوند. روش‌های لیپانوف در بررسی پایداری مدل‌های بخش‌بندی شده اپیدمیولوژیک کاربرد گسترده دارند (Cangiotti et al., 2024). اگر $I(t)$ نسبت افراد مصاب باشد و $S(t) + I(t) = 1$ ، معادله مربوط به افراد مصاب به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{I} = \beta I(1 - I) - \gamma I$$

که به شکل معادل می‌توان نوشت

$$\dot{I} = I[(\beta - \gamma) - \beta I]$$

در این روابط، β نرخ انتقال و γ نرخ بهبودی است. تعادل بدون مرض برابر است با

$$I^* = 0$$

و عدد تولیدمثل پایه مدل به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$$

برای بررسی پایداری تعادل بدون مرض، تابع لیپانوف زیر انتخاب می‌شود

$$V(I) = \frac{1}{2}I^2$$

این تابع در $I = 0$ صفر و برای $I \neq 0$ مثبت است. مشتق تابع لیاپانوف در امتداد مسیره‌ای سیستم برابر است با

$$\dot{V}(I) = I\dot{I}$$

با جایگذاری معادله مودل داریم

$$\dot{V}(I) = I^2[(\beta - \gamma) - \beta I]$$

اگر شرط

$$\beta < \gamma$$

برقرار باشد، آنگاه

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} < 1$$

و برای $I > 0$ ، مقدار $\dot{V}(I) < 0$ خواهد بود. بنابراین، تعادل بدون مرض $I^* = 0$ در ناحیه زیستی مودل پایدار مجانبی است.

برای بررسی عددی این نتیجه در MATLAB، مقادیر زیر در نظر گرفته شدند:

$$\beta = 0.3, \gamma = 0.5, I(0) = 0.2$$

در این حالت

$$R_0 = \frac{0.3}{0.5} = 0.6 < 1$$

شیه‌سازی عددی نشان می‌دهد که $I(t)$ با افزایش زمان به صفر نزدیک می‌شود. در زمان

$t = 30$ ، مقدار تقریبی نسبت افراد مصاب برابر است به

$$I(30) \approx 3.82 \times 10^{-4}$$

همچنان مقدار تابع لیاپانوف در همین زمان تقریباً برابر است با

$$V(30) \approx 7.28 \times 10^{-8}$$

کاهش پیوسته $I(t)$ و تابع $V(I)$ با نتیجه تحلیل نظری سازگار است و نشان می‌دهد که

برای $R_0 < 1$ ، تعادل بدون مرض پایدار مجانبی است. مقادیر پارامترهای این مثال صرفاً

برای نمایش عددی نتیجه نظری انتخاب شده‌اند و از معلومات واقعی یک اپیدمی استخراج

نشده‌اند.

مناقشه

تحلیل بالا نشان می‌دهد که روش مستقیم لیپانوف هنوز برای فهم پایداری سیستم‌های غیرخطی اهمیت جدی دارد. دلیل آن فقط بی‌نیازی از حل صریح معادلات نیست؛ مهم‌تر این است که روش، نگاه تحلیل‌گر را به ساختار سیستم معطوف می‌سازد. وقتی تابع مناسب انتخاب شود، رفتار آن در طول مسیرها می‌تواند درباره تعادل معلومات دقیق بدهد (Khalil, 2021; Voßwinkel & Röbenack, 2023).

در مقایسه با خطی‌سازی، روش لیپانوف به مودل غیرخطی وفادارتر می‌ماند. خطی‌سازی برای بررسی محلی مفید است، اما همیشه همه رفتارهای غیرخطی را نشان نمی‌دهد. البته این به معنای کنار گذاشتن خطی‌سازی نیست؛ در بسیاری از مسائل، خطی‌سازی و روش لیپانوف در کنار هم کارآمدترند. تفاوت اصلی این است که در روش لیپانوف، اگر تابع مناسب وجود داشته باشد، می‌تواند تحلیل عمیق‌تری از رفتار سیستم ارائه کند (Bernal et al., 2022).

مشکل اصلی همچنان انتخاب تابع است. در مثال اسکالر، تابع درجه دوم کافی بود. در آونگ میرا، تابع انرژی‌مانند طبیعی به نظر می‌رسید. در مودل لجستیک نیز فاصله از تعادل مثبت، تابع مناسبی ساخت. اما در سیستم‌های پربعد و پیچیده، چنین حدس‌هایی همیشه ساده نیست. به همین دلیل، ادبیات جدید به ساخت تابع لیپانوف با روش‌های محاسباتی، یادگیری ماشین، شبکه‌های عصبی و برنامه‌ریزی مجموع مربعات توجه کرده است (Gaby et al., 2022; Grüne, 2021; Jones et al., 2023).

در سال‌های اخیر، دامنه روش لیپانوف گسترده‌تر شده است. در سیستم‌های مرتبه کسری، محققان شرایط تازه‌ای برای به‌کارگیری روش مستقیم مطرح کرده‌اند (Liu et al., 2016; Tuan & Trinh, 2018). در سیستم‌های دارای میرایی کسری نیز تعمیم روش مستقیم و استفاده از ایده ناوردایی، امکان تحلیل مودلهای پیچیده‌تر را فراهم ساخته است (Hinze et al., 2020). در کنترل غیرخطی جدید نیز تابع لیپانوف کنترلی در کنار تابع مانع کنترلی، راهی برای ترکیب پایداری و ایمنی فراهم کرده است (Dawson et al., 2023; Li et al., 2023).

از نگاه آموزشی، روش مستقیم لیپانوف برای محصلان ریاضیات، فزیک و انجیری ارزش دارد؛ چون آن‌ها را از حل میخانیکی معادلات به سمت فهم رفتار سیستم می‌برد. البته تدریس این روش زمانی موثرتر است که منطق انتخاب تابع نیز توضیح داده شود. اگر فقط فورمول‌ها ارائه شوند، روش خشک و حفظی به نظر می‌رسد؛ اما وقتی رابطه میان تابع، مشتق و رفتار مسیرها روشن شود، مفهوم پایداری بهتر فهمیده می‌شود.

محدودیت این مقاله آن است که ماهیت مروری - تحلیلی دارد و شبیه‌سازی عددی تازه یا الگوریتم جدید ارائه نمی‌کند. تمرکز مقاله بر سیستم‌های پیوسته و مثال‌های ساده بوده است. در آینده می‌توان همین بحث را در سیستم‌های گسسته، سیستم‌های دارای عدم قطعیت، سیستم‌های پربعد، مدل‌های جمعیتی و اپیدمیولوژیک پیچیده و روش‌های مبتنی بر یادگیری ماشین ادامه داد (Cangiotti et al., 2024; Grüne, 2021; Li et al., 2023).

نتیجه‌گیری

تحلیل انجام‌شده نشان می‌دهد که روش مستقیم لیپانوف می‌تواند بدون حل صریح معادلات تفاضلی، پایداری سیستم‌های غیرخطی را بررسی کند. در این روش، با انتخاب تابعی مناسب و مطالعه مشتق آن در امتداد مسیرهای سیستم، می‌توان درباره پایداری، پایداری مجانبی و در شرایط قوی‌تر، پایداری نمایی نتیجه گرفت. همین خاصیت سبب شده است که روش مستقیم لیپانوف یکی از ابزارهای مهم در تحلیل نظری سیستم‌های غیرخطی باقی بماند.

با وجود این، روش مستقیم لیپانوف تنها یک ابزار اثبات نیست؛ بلکه چارچوبی برای فهم ساختاری رفتار سیستم فراهم می‌کند. کاربرد آن در سیستم‌های میخانیکی، کنترولی، الکتریکی، جمعیتی و اپیدمیولوژیک نشان می‌دهد که این روش از نظر نظری و آموزشی ظرفیت گسترده دارد. با این حال، دشواری یافتن تابع لیپانوف مناسب همچنان مهم‌ترین محدودیت عملی آن است. اگر تابع مناسب انتخاب شود، تحلیل پایداری روشن و قانع‌کننده خواهد بود؛ اما اگر چنین تابعی پیدا نشود، نبود آن به‌تنهایی دلیل ناپایداری سیستم نیست.



بر اساس منابع پس از سال ۲۰۱۵، تحقیقات جدید این دشواری را از مسیرهای مختلف دنبال کرده‌اند؛ از جمله روش‌های محاسباتی، بهینه‌سازی، شبکه‌های عصبی، توابع لیاپانوف کنترولی، روش‌های مجموع مربعات، سیستم‌های مرتبه کسری، واریسی خودکار پایداری و کاربردهای اپیدمیولوژیک. از این رو، پیوند میان روش مستقیم لیاپانوف، روش‌های جدید ساخت تابع و کاربردهای آموزشی و اپیدمیولوژیک آن می‌تواند زمینه مناسبی برای تحقیقات آینده باشد.

منابع

- Bernal, M., Sala, A., Lendek, Z., & Guerra, T. M. (2022). *Analysis and synthesis of nonlinear control systems: A convex optimisation approach*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90773-0>
- Cangiotti, N., Capolli, M., Sensi, M., & Sottile, S. (2024). A survey on Lyapunov functions for epidemic compartmental models. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 17(2), 241–257. <https://doi.org/10.1007/s40574-023-00368-6>
- Dawson, C., Gao, S., & Fan, C. (2023). Safe control with learned certificates: A survey of neural Lyapunov, barrier, and contraction methods for robotics and control. *IEEE Transactions on Robotics*, 39(3), 1749–1767. <https://doi.org/10.1109/TRO.2022.3232542>
- Doban, A. I., & Lazar, M. (2018). Computation of Lyapunov functions for nonlinear differential equations via a Massera-type construction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63(5), 1259–1272. <https://doi.org/10.1109/TAC.2017.2736961>
- Feyzmahdavian, H. R., Besselink, B., & Johansson, M. (2018). Stability analysis of monotone systems via max-separable Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63(3), 643–656. <https://doi.org/10.1109/TAC.2017.2727282>
- Gaby, N., Zhang, F., & Ye, X. (2022). Lyapunov-Net: A deep neural network architecture for Lyapunov function approximation. In *2022 IEEE 61st Conference on Decision and Control (CDC)* (pp. 2091–2096). IEEE. <https://doi.org/10.1109/CDC51059.2022.9993006>
- Grüne, L. (2021). Computing Lyapunov functions using deep neural networks. *Journal of Computational Dynamics*, 8(2), 131–152. <https://doi.org/10.3934/jcd.2021006>
- Hinze, M., Schmidt, A., & Leine, R. I. (2020). The direct method of Lyapunov for nonlinear dynamical systems with fractional damping. *Nonlinear Dynamics*, 102(4), 2017–2037. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05962-3>
- Jones, M., & Peet, M. M. (2023). A converse sum of squares Lyapunov function for outer approximation of minimal attractor sets of



- nonlinear systems. *Journal of Computational Dynamics*, 10(1), 48–74. <https://doi.org/10.3934/jcd.2022019>
- Khalil, H. K. (2021). Lyapunov's stability theory. In J. Baillieul & T. Samad (Eds.), *Encyclopedia of systems and control* (2nd ed., pp. 1170–1174). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-44184-5_77
- Li, B., Wen, S., Yan, Z., Wen, G., & Huang, T. (2023). A survey on the control Lyapunov function and control barrier function for nonlinear-affine control systems. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 10(3), 584–602. <https://doi.org/10.1109/JAS.2023.123075>
- Liu, S., Jiang, W., Li, X., & Zhou, X.-F. (2016). Lyapunov stability analysis of fractional nonlinear systems. *Applied Mathematics Letters*, 51, 13–19. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2015.06.018>
- Liu, S., Liberzon, D., & Zharnitsky, V. (2020). Almost Lyapunov functions for nonlinear systems. *Automatica*, 113, 108758. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.108758>
- Tuan, H. T., & Trinh, H. (2018). Stability of fractional-order nonlinear systems by Lyapunov direct method. *IET Control Theory & Applications*, 12(17), 2417–2422. <https://doi.org/10.1049/iet-cta.2018.5233>
- Voßwinkel, R., & Röbenack, K. (2023). Systematic analysis and design of control systems based on Lyapunov's direct method. *Algorithms*, 16(8), 389. <https://doi.org/10.3390/a16080389>