

بررسی توابع بی-اسپلاین‌ها

پوهنیار جاوید هاشمی^۱ پوهنمل محمد حسین فراهی^۲، دیپارتمنت ریاضی، پوهنځی تعلیم و تربیه، مؤسسه تحصیلات عالی فراه

ایمیل: Jawidhashemi4@gmail.com

چکیده

یکی از مهم‌ترین کارهایی که در زمینه ریاضیات محاسباتی، همواره مورد توجه بوده و نقش اساسی در حل عددی مسایل ریاضی دارد، موضوع توابع اسپلاین^۱ است. به خصوص توابع بی-اسپلاین^۲ که از امتیازات بارزی برخوردار است. هدف از انجام این تحقیق بررسی توابع بی-اسپلاین و معرفی بی-اسپلاین‌های عددی در قضیه ضرب تایلور^۳ می‌باشد. در این تحقیق از جدیدترین مقالات، تیزس‌ها، رساله‌ها و کتب‌های آنالیز عددی استفاده شده است. در مباحث آنالیز عددی که یکی از شاخه‌های ریاضیات است. توابع بی-اسپلاین تابع می‌باشد که دارای کمترین تکیه‌گاه بر حسب یک درجه مفروض، همواری و افراز ناحیه است. بی-اسپلاین‌های اصلی شامل نقاط هستند که هم فاصله‌اند. بی-اسپلاین‌های عددی نقش مهم و فعال را در نظریه تقریب بازی می‌کند. با استفاده از بی-اسپلاین‌های عددی^۴ از درجه اول، دوم و سوم می‌توانیم قضیه ضرایب تایلور را به دست آوریم. توابع بی اسپلاین زیر حالتی از توابع سی دی-اسپلاین می‌باشد، تمام خصوصیات توابع بی-اسپلاین در توابع سی دی-اسپلاین نیز وجود دارد. یکی از کاربردهای توابع بی-اسپلاین در ترسیم منحنی‌هایی است که از قطعات منحنی‌های پولینومی تشکیل شده‌اند. این نوع منحنی، بنام منحنی بی-اسپلاین یاد می‌شود. از توابع بی-اسپلاین‌ها می‌توان برای فیت کردن منحنی و مشتق‌گیری عددی داده‌های لابراتواری استفاده کرد. تابع ذکر شده از این جهت دارای اهمیت هستند، که تشکیل یک پایه برای فضای اسپلاین‌ها را می‌دهند. در طراحی به کمک کامپیوتر و گرافیک کامپیوتری، توابع اسپلاین به صورت ترکیب خطی بی-اسپلاین‌ها با مجموعه‌ای از نقاط کنترل ساخته می‌شوند.

کلمات کلیدی: بی-اسپلاین‌های عددی، توابع بی-اسپلاین، قضیه ضرب تایلور، ویژگی

بی-اسپلاین‌ها

-
- 1 Spline functions
 - 2 B-Spline function
 - 3 Taylor coefficient theorem
 - 4 numerical b-splines

مقدمه

ریاضیات یکی از کهن ترین دانش هایی است که همواره مورد توجه بشر بوده است. این دانش اهمیت بسزایی در زندگی بشر، به خصوص زندگی روزمره ایفا می کند. اهمیت این دانش در حدی است که از همان سال های اول آموزش، ساعات زیادی از برنامه آموزشی به آن اختصاص یافته است (صفوی، ۱۳۷۹: ۱۵). در طی سال هایی که از معرفی اسپالین ها می گذرد مبانی نظری آن ها توسعه یافته اند و نسخه هایی تعمیم یافته متفاوتی از آن ها معرفی شده اند و حوزه کاربردهای این ابزار قدرت مند ناپارامتری نیز به شدت گسترش یافته است. با توجه به کاربردهای وسیع و اهمیت شناخت اسپالین ها در این تحقیق به معرفی توابع بی-اسپالین ها و روند رشد و توسعه آن ها می پردازیم و برخی از ویژگی های آن ها را نیز مطرح می کنیم. توابع بی-اسپالین پایه، اساس نتایج و روش های متعدد نظریه تقریبی هستند و امروزه بخشی جدایی ناپذیر از مدل سازی هندسی و سیستم های تجزیه و تحلیل انجینری محاسباتی است (بابلیان، ۱۳۶۶: ۱۳۲). بررسی بی-اسپالین ها بر می گردد به قرن نوزدهم در تحقیقات نیکلای لوباچفسکی. کلمه بی-اسپالین را ایزاک یاکوب شونبرگ ابداع کرد که مخفف اسپالین پایه است (هاشمی، ۱۳۹۸: ۱۵). این تابع در ریاضیات یک تابع هموار چند ضابطه ای با ضابطه های پولینومی است (راتمانی، ۱۳۹۵: ۱۲۰).

بی-اسپالین ها منحنی هایی را می سازند که شامل پولینومی های با درجه یکسان روی انتروال مشخص هستند و با شرایط پیوستگی تعریف شده ای به هم می پیوندند و از گره های مشترک بین دو زیر مجموعه عبور می کنند (کرایه چیان، ۱۳۸۵: ۱۱۲). در طی سال هایی که از معرفی توابع بی-اسپالین ها می گذرد مبانی نظری آن ها توسعه یافته اند و نسخه هایی تعمیم یافته متفاوتی از آن ها معرفی شده اند و حوزه های کاربردی این ابزار قدرت مند ناپارامتری نیز به شدت گسترش یافته و به دلیل کاربردهای وسیع و اهمیت فراوان در مسایل زندگی، معرفی توابع بی-اسپالین و روند رشد و توسعه آن ها می پردازیم. کلمه اسپالین در حقیقت به نوار باریکی از جنس چوب یا فلز باز می گردد (هاشمی، ۱۳۹۸: ۱۳).

قبل از تکامل گرافیک کامپیوتری برای طراحی بدنه کشتی ها، بال های هواپیماها و قطعات تلفن همراه از بی-اسپالین کار می گرفتند. به دلایل فیزیکی، این چنین منحنی ها

تقریباً چند ضابطه‌ای درجه سوم با مشتق دوم پیوسته اند. می‌دانیم انحناى هر منحنی در هر نقطه به مشتق دوم منحنی در آن نقطه وابسته است. در نقاط انتهایی، یک نوار واقعی از چوب یا فلز خم نمی‌شود و مشتق دوم این منحنی صفر است (رشیدی نیا، ۱۳۹۷: ۳۵). بنابراین انعطاف پذیری به حد کافی در ساختار بی-اسپلاین مکعبی وجود دارد، که تضمین نماید نه تنها درون‌یاب بطور پیوسته روی انتروال مشتق پذیر است، بلکه دارای یک مشتق پیوسته مرتبه دوم روی انتروال است (احمدی، ۱۳۹۷: ۲۷).

ارزش و اهمیت این تحقیق در ساحه علم ریاضیات بسیار زیاد است، به‌خصوص در کشور ما افغانستان، زیرا در تکنالوژی و فناوری عصر حاضر توابع بی-اسپلاین کاربرد فراوان و چشم‌گیری در قطعات تلفن همراه، بال‌های هواپیماها، بدنه کشتی‌ها و ساخت ساز ماشین آلات دارند همچنان در قسمت ترسیم منحنی‌های پولینومی و معادلات دیفرانسیلی حایز اهمیت خاص می‌باشد.

توابع بی-اسپلاین درجه n ام

توابع بی-اسپلاین از درجه n تابعی قطعه‌ای پولینومی از درجه کمتر یا مساوی n بر حسب متغیری مانند t است که بر انتروال $[t_0, t_n]$ تعریف می‌شود. توابع بی-اسپلاین از جهت که تشکیل یک پایه برای فضای اسپلاین‌ها را می‌دهند حایز اهمیت هستند، مجموعه نامتناهی‌ای از ګره‌ها $\varphi = (\varphi_i)$ را که بی-اسپلاین‌ها بر آن‌ها استوار هستند را به صورت زیر در نظر می‌گیریم (Abramowitz and Stegun, 1964: 8).

$$\dots < \varphi - 2 < \varphi - 1 < 0 < \varphi + 1 < \varphi + 2 < \dots$$

برای اسپلاین‌های درجه صفر

$$B_{i,0}, \varphi(t) = \begin{cases} 1, & \varphi_i \leq t \leq \varphi_{i+1} \\ 0, & o.w \end{cases}$$

تکیه‌گاه این تابع انتروال $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$ است. هر تابع اسپلاین از درجه صفر را که از راست پیوسته است می‌توان به صورت ترکیب خطی از بی-اسپلاین‌های درجه صفر نوشت.

اگر

$$S(t) = \begin{cases} b_i, & \varphi_i \leq t \leq \varphi_{i+1} \\ 0, & o.w \end{cases}$$

$$S(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i B_i, 0, \varphi(t)$$

بی-اسپالین درجه اول:

$$B_i, 1, \varphi(t) = \begin{cases} \frac{t - \varphi_i}{\varphi_{i+1} - \varphi_i}, & \text{اگر } t \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}) \\ \frac{\varphi_{i+2} - t}{\varphi_{i+2} - \varphi_i}, & \text{اگر } t \in [\varphi_{i+2}, \varphi_{i+1}) \\ 0 & \end{cases}$$

ویژه گی های بی-اسپالین های درجه اول:

✓ تکیه گاه $B_i, 1, \varphi(t)$ انتروال $\varphi_{i+2} - \varphi_i$ است.

✓ برای هر i و برای هر x , $B_i, 1, \varphi(t) \geq 0$

✓ $B_i, 1, \varphi(t)$ پیوسته و بجز در نقاط $\varphi_i, \varphi_{i-1}, \varphi_{i-2}$ مشتق پذیر است.

✓ برای هر x , $\sum_{i=0}^{\infty} B_i, 1, \varphi(t) = 0$

بی-اسپالین درجه دوم:

$$B_i, 2, \varphi(t) = \begin{cases} \frac{(t - \varphi_i)^2}{(\varphi_{i+2} - \varphi_i) + (\varphi_{i+1} - \varphi_i)}, & \text{if } t \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}) \\ \frac{(t - \varphi_i)(\varphi_{i+2} - t)}{(\varphi_{i+2} - \varphi_i)(\varphi_{i+2} - \varphi_{i+1})} + \frac{(t - \varphi_{i+1})(\varphi_{i+3} - t)}{(\varphi_{i+2} - \varphi_{i+1})(\varphi_{i+3} - \varphi_{i+1})}, & \text{if } t \in [\varphi_{i+2}, \varphi_{i+1}) \\ \frac{(\varphi_{i+3} - t)^2}{(\varphi_{i+3} - \varphi_{i+1}) + (\varphi_{i+3} - \varphi_{i+2})}, & \text{if } t \in [\varphi_{i+2}, \varphi_{i+3}) \\ 0 & o.w \end{cases}$$

بررسی توابع بی-اسپالین عددی

بی-اسپالین عددی نقش مهمی در نظریه تقریب بازی می کند.

تعریف: بی-اسپالین عددی از درجه صفر تا تابع مشخصه روی انتروال $[0, 1)$ است که با

Ψ نمایش داده می شود. (Samuel R, 2003:15)

$$\Psi_0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1) \\ 0, & o.w \end{cases}$$

بی-اسپالین عددی از درجه p , $p \in N$ را با Ψ_p نمایش می دهیم.

$$\Psi_0(t) = (\Psi_{p-1} * \Psi_0)(t) = \int_R \Psi_{p-1}(t-s) \Psi_0(s) ds$$

در این صورت:

$$\Psi_1(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1) \\ 2-t, & t \in [0,2) \\ 0 & o.w \end{cases}$$

و

$$\Psi_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & t \in [0,1) \\ \frac{1}{2} + (t-1) - (t-1)^2, & t \in [0,2) \\ \frac{1}{2} - (t-2) + \frac{1}{2}(t-2)^2, & t \in [2,3) \\ 0 & o.w \end{cases}$$

شرایط زیر برای بی-اسپلین عددی از درجه p صدق می کند.

✓ تکیه گاه Ψ_p برابر $[0, p+1)$ است.

✓ برای هر $s \in [0, p+1)$ $\Psi_0(s) \geq 0$

✓ $\Psi_p \in C^{p-1}[0, p+1)$

✓ برای هر $i \in \{0, 1, 2, \dots, p\}$ Ψ_p پولینومی قطعه ای از درجه p در انتروال

$[i, i+1)$. دنباله $\{0, 1, 2, \dots, p\}$ به عنوان بی-اسپلین عددی از درجه p

شناخته شده است.

✓ برای هر $t \in [0, p+1)$ و $p \geq 1$

$$\Psi'_p(t) = \Psi_{p-1}(t) - \Psi_{p-1}(t-1)$$

✓ برای هر $\Psi_p(t) =$

$$\Psi_p(p+1-t), \quad t \in [0, p+1)$$

برای هر بی-اسپلین عددی از درجه p قرار می دهیم.

$$\alpha_i^p = (\alpha_{0,i}^p, \alpha_{1,i}^p, \dots, \alpha_{p,i}^p)$$

پس روی انتروال $[i, i+1)$ داریم:

$$\varepsilon_p(t) = \alpha_{0,i}^p t + \alpha_{1,i}^p t^2 + \dots + \alpha_{p,i}^p t^p, \quad \forall t \in [i, i+1)$$

هنگامی که $i, j \notin [0, p]$ قرار می دهیم:

$$\alpha_p(t) = \alpha_{i,j}^p$$

قضیه ضرایب تایلور

برای i, k و p داریم که:

$$\alpha_{i,k}^p = \frac{k}{p} \alpha_{i,k}^{p-1} + \frac{1}{p} \alpha_{i-1,k}^{p-1} + \frac{p+1-k}{p} \alpha_{i,k-1}^{p-1} - \frac{1}{p} \alpha_{i-1,k-1}^{p-1}$$

اثبات: از $y = i + t$ و $t \in [0, 1]$ داریم

$$\frac{y}{p} \alpha^{p-1}(y) = \left(\frac{k}{p} + \frac{t}{p} \right) \left(\alpha_{0,i-1}^{p-1} t + \alpha_{1,i-1}^{p-1} t^2 + \dots \right. \\ \left. + \alpha_{p,i-1}^{p-1} t^p \right) \frac{p+1-t}{p}$$

$$\alpha^{p-1}(y-1) = \left(\frac{p+1-k}{p} - \frac{t}{p} \right) \left(\alpha_{0,i-1}^{p-1} t + \alpha_{1,i-1}^{p-1} t^2 + \dots + \alpha_{p,i-1}^{p-1} t^p \right)$$

دو طرف رابطه را جمع می کنیم و فرمول $\alpha_{p,i}^p$ حاصل می شود.

با استفاده از این فرمول می توانیم ضرایب تایلور را برای توابع بی-اسپلاین های عددی از درجه اول، دوم و سوم را به دست آوریم.

جدول ۱: ضریب تایلور برای توابع بی-اسپلاین های عددی از درجه اول

ضرایب تایلور		انتروال
$\alpha_{0,1}$	0 1	[0,1]
$\alpha_{1,1}$	1 - 1	[1,2]

جدول ۲: ضریب تایلور برای توابع بی-اسپلاین های عددی از درجه دوم

ضرایب تایلور		انتروال
$\alpha_{0,2}$	0 0 $\frac{1}{2}$	[0,1]

$\alpha_{1,2}$	$\frac{1}{2}$	1	- 1	[1,2]
$\alpha_{2,2}$	$\frac{1}{2}$	- 1	$\frac{1}{2}$	[2,3]

جدول ۳: ضریب تایلور برای توابع بی-اسپلاین های عددی از درجه سوم

ضرایب تایلور					انتروال
$\alpha_{0,3}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	[0,1]
$\alpha_{1,3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	[1,2]
$\alpha_{2,3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{2}$	[2,3]
$\alpha_{3,3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	[3,4]

بی-اسپلاین های عددی درجه p را بصورت زیر تعریف می کنیم. اگر $h > 0$,

$$\Psi_{i,h,p}(t) = \Psi_p\left(\frac{t}{h} - i\right)$$

تکیه گاه $\Psi_{i,h,p}$ انتروال $[i, i + p + 1]h$ است (T.Lyche and H, 2016: 6).

نتیجه گیری

در این مقاله برخی از مهمترین توابع بی-اسپلاین مورد بحث و معرفی قرار گرفته، که بر اساس آن ها توابع بی-اسپلاین عددی از (درجه ۰، درجه ۱، درجه ۲، درجه ۳ و درجه p)، استفاده از قضیه ضریب تایلور در توابع بی-اسپلاین عددی، ارتباط بین توابع اسپلاین و توابع بی-اسپلاین و هم چنان استفاده از خصوصیات توابع بی-اسپلاین در توابع سی دی-اسپلاین، استعمال بی-اسپلاین ها در فیت کردن منحنی و مشتق گیری عددی داده های لابراتواری مورد بحث قرار گرفته است و همچنان محاسبات بی-اسپلاین در دستگاه های محاسباتی برجسته شده است. در طراحی به کمک کامپیوتر و گرافیک کامپیوتری، این توابع به صورت ترکیب خطی با مجموعه ای از نقاط کنترل ساخته می شوند.



منابع

- احمدی، محمد باقر. (۱۳۸۳). *آنالیز عددی*^۲. تهران: انتشارات دانشگاه پیام نور.
- بابلیان، اسماعیل. (۱۳۶۶). *حل عددی معادلات چندجمله‌ای*، رشد آموزش ریاضی، شماره ۱۴.
- کرایه‌چیان، اصغر. (۱۳۸۵). *آنالیز^۱ برای دانشجویان علوم مهندسی*. مشهد: انتشارات بنفشه.
- هاشمی، جاوید. (۱۳۹۸). *توابع اسپلاین و دنباله خطاها در بهترین تقریب چندجمله‌ای‌ها*. تیزس ماستری، پوهنتون یزد: انتشارات مهتاب.
- Lyche, T., Manni, C., & speleers, H. (2016). B-Splines and spline approximations. Lecture notes in Math.
- Abramowitz, M. & Stegun, I. A. (1964). Handbook of Mathematical Functions. number 55 in Applied Mathematics Series.
- Ratmani, E. (2016). B-spline and Analysis Approx.
- Arindam, Chaudhuri. (2018). Some investigations with B-Spline curves: Samsung R&D Institute Delhi India.
- Andrzej, Partyka. (2014). Organ surface reconstruction using B-Splines and Acta Polytechnica.
- Samuel, Buss, R. (2003). 3D Computer Graphics – A mathematical introduction with Open GL: Cambridge University Press.



A Study of B-Splines Function

Jawid Hashimi, Mohammad Hussain Farahi, Mathematics
Department, Education Faculty, Farah Higher Education
Institute

Email: Jawidhashemi4@gmail.com

Abstract

One of the most important works in the field of computational mathematics has always been of interest and plays a fundamental role in solving mathematical problems numerically is spline functions. specially B-spline functions with distinct advantages. The purpose of this study is to investigate B-spline functions and introduce numerical B-splines by Taylor coefficient theorem. In the argument of numerical analysis, which is one of the fields of mathematics, B-spline functions (basic spline) is the function that has the least support in terms of an assumed degree, smoothness, and region elevation, contain points that are equidistant. Numerical B-splines play an important and active role in approximation theory. By using numerical B-splines of 1,2and 3 degrees we can obtain the case of Taylor's coefficients. B-spline functions are a form of CD-spline functions, that is, all the characteristics of B-spline functions are also present in CD-spline functions as well. One of the applications of B-spline functions is in drawing curves that are composed of parts of polynomial curves. This type of curve is called B-spline curve. Any spline function of a given degree can be written in terms of a linear combination of b-splines of the same degree. B-spline functions can be used for curve fitting and numerical derivation of laboratory data. B-spline functions are important because they form the space of splines. In computer-aided design and computer graphics, spline functions are constructed as linear combinations of B-splines with a set of control points.

Keywords: Numerical B-Splines, Functions, Properties Of B-Splines, Taylor Coefficient Theorem