



نقش پیچیدگی محلی در ناسازگاری مشاهده‌پذیرهای کوانتومی

پوهنمل حامد طیب^۱، پوهنیار یما اصیل^۲

رشته فزیک پوهنځی تعلیم و تربیه، پوهنتون فراه

ایمیل: hamedtayeb1369@gmail.com

چکیده

ناسازگاری مشاهده‌پذیرها یکی از مفاهیم بنیادی در میخانیک کوانتومی است که ریشه در ساختار ریاضی عملگرهای کوانتومی و اصل عدم قطعیت دارد، که نقش مهمی در تبیین رفتار سیستم‌های کوانتومی، نظریه اندازه‌گیری، تحلیل اطلاعات کوانتومی و محاسبات کوانتومی ایفا می‌کند. در سال‌های اخیر هم‌زمان با گسترش تحقیقات در حوزه اطلاعات و پیچیدگی کوانتومی، توجه محققان به بررسی عوامل مؤثر بر رفتار مشاهده‌پذیرهای ناسازگار و چگونگی ارتباط آن‌ها با ساختار اطلاعاتی سیستم‌های کوانتومی معطوف شده است، با وجود مطالعات گسترده درباره ناسازگاری مشاهده‌پذیرها و پیچیدگی کوانتومی نقش پیچیدگی محلی در شکل‌گیری و تقویت ناسازگاری مشاهده‌پذیرها همچنان به‌صورت کامل روشن نشده است، از این‌رو هدف تحقیق حاضر بررسی و تبیین نقش پیچیدگی محلی در ناسازگاری مشاهده‌پذیرها و تحلیل تأثیر ساختار محلی عکس-العمل‌های متقابل بر رفتار اندازه‌گیری در سیستم‌های کوانتومی است. این تحقیق با استفاده از روش توصیفی - تحلیلی و مبتنی بر مطالعه منابع معتبر علمی، نظریه عملگرها، جبر جابجاگرها، نظریه اطلاعات کوانتومی و مدل‌های چند ذره‌ای کوانتومی انجام شده است. در این راستا، ارتباط میان پیچیدگی محلی، توزیع اطلاعات کوانتومی، درهم‌تنیدگی و میزان ناسازگاری مشاهده‌پذیرها مورد بررسی قرار گرفت و چارچوبی مفهومی برای تبیین این رابطه ارائه شده است. یافته‌های تحقیق نشان می‌دهد که افزایش پیچیدگی محلی در بسیاری از سیستم‌های کوانتومی می‌تواند به افزایش همبستگی‌های کوانتومی و تغییر ساختار جابجاگرهای مؤثر منجر شود و در نتیجه سطح ناسازگاری مشاهده‌پذیرها را تحت تأثیر قرار دهد. همچنین نتایج حاکی از آن است که پیچیدگی محلی می‌تواند به‌عنوان یکی از عوامل کلیدی در درک بهتر جریان‌ات اندازه‌گیری کوانتومی، فروپاشی همدوسی کوانتومی و توسعه سیستم‌های پیشرفته اطلاعات کوانتومی مورد توجه قرار گیرد.

کلمات کلیدی: اطلاعات کوانتومی، اندازه‌گیری کوانتومی، پیچیدگی محلی، جابجاگرها، مشاهده‌پذیرهای ناسازگار، میخانیک کوانتومی.



The Role of Local Complexity in the Incompatibility of Quantum Observables

Hamed Tayeb, Yama Aseel

Abstract

The incompatibility of quantum observables is one of the fundamental concepts in quantum mechanics, rooted in the mathematical structure of quantum operators and the uncertainty principle. It plays a pivotal role in explaining the behavior of quantum systems, measurement theory, quantum information processing, and quantum computation. In recent years, alongside the rapid development of quantum information and quantum complexity research, increasing attention has been devoted to investigating the factors influencing the behavior of incompatible observables and their relationship with the informational structure of quantum systems. Despite extensive studies on observable incompatibility and quantum complexity, the role of local complexity in the emergence and enhancement of observable incompatibility has not yet been fully clarified. Therefore, the present study aims to investigate and elucidate the role of local complexity in the incompatibility of quantum observables and to analyze the influence of the local interaction structure on measurement behavior in quantum systems. This study employs a descriptive–analytical approach based on an extensive review of authoritative scientific literature, drawing upon operator theory, commutator algebra, quantum information theory, and quantum many-body models. Within this framework, the relationship among local complexity, quantum information distribution, quantum entanglement, and the degree of observable incompatibility is systematically examined, and a conceptual framework is proposed to explain these interrelationships. The findings indicate that increasing local complexity in many quantum systems can enhance quantum correlations and modify the structure of the relevant commutators, thereby influencing the degree of observable incompatibility. Furthermore, the results suggest that local complexity can be regarded as a key factor in improving the understanding of quantum measurement processes, quantum decoherence, and the development of advanced quantum information systems.

Keywords: Commutator; Incompatible Quantum Observables; Local Complexity; Quantum Mechanics; Quantum Information; Quantum Measurement.

مقدمه

الحمد لله رب العالمين و الصلاة و السلام على سيدنا محمد و على آله و صحبه اجمعين
حمد و سپاس بی پایان خداوند متعال را سزااست که انسان را به دانش و اندیشه گرامی
داشت و راه شناخت و آبادانی جهان را برای او گشود. درود و سلام بر حضرت محمد
مصطفی (ص) پیام آور علم، هدایت و رحمت و بر خاندان و یاران گرامی ایشان باد.

میکانیک کوانتومی به عنوان بنیادی ترین چارچوب نظری برای توصیف پدیده های
فیزیکی در مقیاس میکروسکوپی، تصویری متفاوت از اندازه گیری و مشاهده در مقایسه با
فزیک کلاسیک ارائه می دهد؛ یکی از خصوصیات اساسی این نظریه، وجود
مشاهده پذیرهای ناسازگار است (Nature Index, 2025). مشاهده پذیرهایی که به دلیل
اینکه جایگزیده نیستند عملگرهای متناظر با آنها، امکان اندازه گیری همزمان و دقیق آنها
وجود ندارد. این مفهوم که ریشه در اصل عدم قطعیت هایزنبرگ دارد، امروزه فراتر از یک
محدودیت اندازه گیری تلقی می شود و به عنوان یک منبع بنیادی در نظریه اطلاعات
کوانتومی، محاسبات کوانتومی، اندازه گیری کوانتومی و نظریه منابع کوانتومی مورد مطالعه
قرار می گیرد (Guhne et al., 2021). تحقیقات اخیر نشان داده اند که ناسازگاری
اندازه گیری ها نه تنها با روابط عدم قطعیت ارتباط دارد، بلکه در پدیده هایی نظیر
درهم تنیدگی، ناهم مکانی کوانتومی (دو ذره ای که از راه دور باهم ارتباط دارد)، هدایت
کوانتومی و مزیت های اطلاعاتی سیستم های کوانتومی نیز نقش تعیین کننده ای ایفا می کند
(Tendick et al., 2023؛ Mitra & Farkas, 2023)؛ با وجود پیشرفت های چشمگیر در
مطالعه ناسازگاری مشاهده پذیرها، بخش عمده تحقیقات گذشته بر خصوصیات جبری
عملگرها، اندازه گیری مشترک، معیارهای کمی ناسازگاری و کاربردهای اطلاعاتی آن
متمرکز بوده است. در مقابل، تأثیر ساختار پیچیدگی سیستم های کوانتومی بر میزان و رفتار
ناسازگاری مشاهده پذیرها هنوز به طور جامع بررسی نشده است. همزمان با توسعه نظریه
پیچیدگی کوانتومی مشخص شده است که رشد پیچیدگی در سیستم های چند ذره ای با نحوه
انتشار اطلاعات کوانتومی، شکل گیری همبستگی ها و تحول مشاهده پذیرهای محلی ارتباط
نزدیکی دارد. مطالعات انجام شده در سیستم های چند جسمی و سیستم های موضعی شده

نشان می‌دهد که پیچیدگی و ساختار محلی بر رفتار مشاهده‌پذیرها و قابلیت شبیه‌سازی آن‌ها اثر مستقیم دارد (Ehrenberg et al., 2022). با این حال، هنوز مشخص نیست که افزایش پیچیدگی محلی چگونه می‌تواند بر میزان ناسازگاری مشاهده‌پذیرها و روابط جابجایی میان آن‌ها تأثیر بگذارد. اهمیت و ضرورت انجام این تحقیق از آن‌جا هویدا می‌شود که درک ارتباط میان پیچیدگی محلی و ناسازگاری مشاهده‌پذیرها می‌تواند دیدگاه جدیدی درباره جریان اندازه‌گیری کوانتومی، پویایی اطلاعات در سیستم‌های چندذره‌ای و طراحی معماری‌های نوین محاسبات کوانتومی ارائه کند. علاوه بر این در سال‌های اخیر ناسازگاری اندازه‌گیری به عنوان یک منبع مستقل در نظریه اطلاعات کوانتومی شناخته شده است و محققان تلاش کرده‌اند چارچوب‌های جدیدی برای کمی‌سازی و بهره‌برداری از آن توسعه دهند (Guhne et al., 2021; Chen et al., 2024). از این رو بررسی نقش پیچیدگی محلی در این پدیده می‌تواند به توسعه مدل‌های نظری جدید و گسترش مرزهای دانش در فیزیک کوانتومی منجر شود.

مرور پیشینه تحقیق نشان می‌دهد که گه‌گی و همکاران در سال (۲۰۲۱) ناسازگاری اندازه‌گیری‌ها را از منظر علوم اطلاعات کوانتومی به صورت جامع بررسی کرده و کاربردهای آن را در پردازش اطلاعات کوانتومی تبیین نموده‌اند؛ تندیک و همکاران در سال (۲۰۲۳) مفهوم ناسازگاری توزیع شده را معرفی کرده و نشان دادند که افزایش تعداد اندازه‌گیری‌ها می‌تواند ساختار ناسازگاری را تغییر دهد چین و همکاران (۲۰۲۴) نیز چارچوبی برای مطالعه اندازه‌گیری همزمان چند مشاهده‌پذیر ناسازگار ارائه کردند، با وجود این، در بررسی ادبیات موجود شکاف تحقیقی آشکاری در ارتباط مستقیم میان پیچیدگی محلی و ناسازگاری مشاهده‌پذیرها مشاهده می‌شود و تاکنون مدل جامعی برای تبیین این ارتباط ارائه نشده است.

بر این اساس هدف اصلی تحقیق حاضر بررسی نقش پیچیدگی محلی در ناسازگاری مشاهده‌پذیرها و تبیین سازوکارهای فیزیکی و اطلاعاتی حاکم بر این ارتباط در سیستم‌های کوانتومی است، این تحقیق در پی پاسخ به این سؤال اساسی است که: «پیچیدگی محلی سیستم‌های کوانتومی چگونه بر میزان ناسازگاری مشاهده‌پذیرها و رفتار اندازه‌گیری آن‌ها تأثیر می‌گذارد؟ بنابر این مدل‌سازی ریاضی و شبیه‌سازی عددی مورد بررسی قرار خواهد گرفت

روش تحقیق

تحقیق حاضر از لحاظ هدف یک تحقیق بنیادی و از لحاظ شیوه اجرا تحقیق توصیفی-تحلیلی مبتنی بر مدل سازی نظری و تحلیل ریاضی است، هدف اصلی این تحقیق بررسی نقش پیچیدگی محلی در ناسازگاری مشاهده پذیرها و تبیین ارتباط میان ساختارهای پیچیده محلی و رفتار اندازه گیری در سیستم های کوانتومی است. برای دستیابی به این هدف ابتدا مبانی نظری مرتبط با مشاهده پذیرهای سازگار و ناسازگار، جبر عملگرها، اصل عدم قطعیت، نظریه اطلاعات کوانتومی و مفاهیم پیچیدگی کوانتومی از منابع علمی معتبر شامل کتاب های مرجع و مقالات نمایه شده در پایگاه های علمی بین المللی مورد مطالعه و تحلیل قرار گرفت است. در مرحله بعد، چارچوب نظری تحقیق بر اساس عملگرهای هرمیتی و روابط جابجایی در فضای هیلبرت تدوین شده است. به منظور بررسی ناسازگاری مشاهده پذیرها، از معیارهای مبتنی بر جابجایی عملگرها و روابط عدم قطعیت استفاده گردید. همچنین برای مطالعه پیچیدگی محلی، ویژگی های ساختاری سیستم های چند ذره ای کوانتومی، میزان عکس العمل های متقابل موضعی، توزیع اطلاعات کوانتومی و الگوهای درهم تنیدگی مورد بررسی قرار گرفت. به منظور تحلیل تأثیر پیچیدگی محلی بر ناسازگاری مشاهده پذیرها، مدل های استاندارد سیستم های کوانتومی چند جسمی از جمله زنجیره های اسپینی و سیستم های دارای عکس العمل متقابل موضعی به عنوان مدل های نظری انتخاب شدند. سپس رفتار عملگرهای مشاهده پذیر در این سیستم ها از طریق تحلیل ریاضی و محاسبات عددی مورد ارزیابی قرار گرفت. در این بخش تغییرات روابط جابجایی، میزان عدم قطعیت و شاخص های اطلاعات کوانتومی در شرایط مختلف پیچیدگی محلی بررسی شد، و ارتباط میان میزان پیچیدگی محلی و درجه ناسازگاری مشاهده پذیرها مورد ارزیابی قرار گرفت. در نهایت، نتایج حاصل از تحلیل های نظری و محاسباتی با یافته های تحقیقات پیشین مقایسه شد تا امکان ارائه چارچوبی مفهومی برای تبیین نقش پیچیدگی محلی در ناسازگاری مشاهده پذیرها فراهم گردد. بدین ترتیب، تحقیق حاضر با بهره گیری از تحلیل نظری، مدل سازی ریاضی و شبیه سازی عددی تلاش می کند تصویری جامع از ارتباط میان پیچیدگی محلی و رفتار مشاهده پذیرهای ناسازگار در سیستم های کوانتومی ارائه دهد.

صورت بندی ریاضی مشاهده پذیرها و نظریه اندازه گیری در میخانیک کوانتومی

میخانیک کوانتومی به عنوان یکی از بنیادی ترین نظریه های فزیک مدرن، چارچوبی ریاضی برای توصیف رفتار سیستم های فزیکی در مقیاس اتمی و کوچکتر از اتم ها ارائه

می‌دهد. برخلاف میخانیک کلاسیک که در آن کمیت‌های فیزیکی دارای مقادیر معین و مستقل از مشاهده فرض می‌شوند، در میخانیک کوانتومی مفهوم مشاهده‌پذیری و جریان اندازه‌گیری جایگاهی کاملاً متفاوت و پیچیده دارد. در این نظریه، حالت فیزیکی یک سیستم پیش از اندازه‌گیری الزاماً متناظر با مقدار مشخصی از کمیت‌های فیزیکی نیست، بلکه به صورت یک ساختار ریاضی احتمالاتی توصیف می‌شود و نتیجه اندازه‌گیری تنها با احتمال مشخصی قابل پیش‌بینی است. (Shankar, 2012) اساس ریاضی میخانیک کوانتومی بر مفهوم فضای هیلبرت استوار است. فضای هیلبرت یک فضای وکتوری مختلط مجهز به ضرب نقطه‌ای است که ویژگی کامل بودن را دارا می‌باشد. در این چارچوب، حالت یک سیستم کوانتومی با وکتور نورمال شده در فضای هیلبرت نمایش داده می‌شود:

$$|y\rangle \in H \quad 1$$

که شرط نورمال‌سازی آن به صورت زیر بیان می‌شود،

$$\langle y | y \rangle = 1 \quad 2$$

این نمایش ریاضی امکان استخراج پیش‌بینی‌های احتمالاتی درباره نتایج اندازه‌گیری را فراهم می‌کند (Hall, 2013). در میخانیک کوانتومی، هر کمیت فیزیکی قابل اندازه‌گیری که «مشاهده‌پذیر نامیده می‌شود، با یک عملگر خودالحاق بر فضای هیلبرت متناظر است از دیدگاه ریاضی مشاهده‌پذیر A عملگری خطی است که شرط خودالحاقی را برآورده می‌کند،

$$A = A^\dagger \quad 3$$

اهمیت عملگرهای خودالحاق در این است که مقادیر ویژه آن‌ها حقیقی هستند و بنابراین می‌توانند با مقادیر قابل مشاهده در تجارب تطابق داشته باشند افزون بر این وکتورهای ویژه این عملگرها بنایی مناسب برای نمایش حالت‌های سیستم ایجاد می‌کنند (Sakurai & Napolitano, 2020). برای نمونه انرژی سیستم توسط عملگر هامیلتونی توصیف می‌شود و مقادیر انرژی از حل معادله ویژه زیر به دست می‌آیند:

$$\hat{H}|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle \quad 4$$

که در آن E_n مقادیر ویژه حقیقی متناظر با حالت‌های انرژی مجاز هستند (Shankar, 2012). یکی از مهم‌ترین ابزارهای ریاضی در تحلیل مشاهده‌پذیرها قضیه طیفی

است این قضیه بیان می‌کند که هر عملگر خودالحاق را می‌توان به کمک اندازه‌های طیفی تجزیه کرد:

$$A = \int \lambda dp(\lambda) \quad 5$$

که در آن λ مقادیر طیفی و $p(\lambda)$ عملگرهای تصویر مرتبط با آن هستند در حالت طیف گسسته این نمایش به صورت زیر ساده می‌شود:

$$A = \sum_i a_i p_i \quad 6$$

که p_i تصویر روی زیرفضای متناظر با مقدار ویژه a_i است. این صورت‌بندی ریاضی ارتباط مستقیمی میان ساختار عملگر و نتایج اندازه‌گیری برقرار می‌کند و از ارکان نظریه اندازه‌گیری کوانتومی محسوب می‌شود (Von Neumann, 1955). در نظریه اندازه‌گیری، اگر سیستم در حالت $|y\rangle$ قرار داشته باشد و مشاهده‌پذیر A اندازه‌گیری شود نتیجه حاصل یکی از مقادیر ویژه آن خواهد بود. احتمال مشاهده مقدار ویژه a_i مطابق قاعده بورن برابر است با

$$p(a_i) = |\langle a_i | y \rangle|^2 \quad 7$$

قاعده بورن نشان می‌دهد که میخانیک کوانتومی ذاتاً نظریه‌ای احتمالاتی است و برخلاف نظریه‌های کلاسیک تنها احتمال وقوع نتایج را تعیین می‌کند (Hall, 2013). یکی از خصوصیات اساسی اندازه‌گیری کوانتومی، پدیده فروریزش تابع موج است. بر اساس این اصل پس از اندازه‌گیری و مشاهده نتیجه a_i ، حالت سیستم از وضعیت اولیه به حالت جدید زیر انتقال می‌یابد،

$$|y\rangle = \frac{p_i |y\rangle}{\sqrt{\langle y | p_i | y \rangle}} \quad 8$$

این تغییر برخلاف تحول زمانی معادله شرودینگر، ماهیتی غیرواحدی دارد و همین تفاوت منشأ بسیاری از پرسش‌های فلسفی و فیزیکی در نظریه اندازه‌گیری شده است (Von Neumann, 1955) در صورت‌بندی سنتی اندازه‌گیری که توسط فون نویمان توسعه یافت اندازه‌گیری‌ها از طریق مجموعه‌ای از عملگرهای تصویر انجام می‌شوند که شرایط زیر را برآورده می‌کنند.

$$p_i p_j = \delta_{ij} p_i \quad 9$$

و

$$\sum_i p_i = 1 \quad 10$$

در این چارچوب احتمال هر نتیجه از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$p_i = \langle y | p_i | y \rangle \quad 11$$

با این حال توسعه‌های جدید در نظریه اندازه‌گیری نشان داده‌اند که اندازه‌گیری‌های واقعی الزاماً ایده‌آل و تصویری نیستند از این رو مفهوم اندازه‌گیری تعمیم‌یافته یا POVM معرفی شد در این حالت مجموعه‌ای از عملگرهای مثبت تعریف می‌شوند که:

$$E_i^3 = 0 \quad 12$$

و

$$\sum_i E_i = I \quad 13$$

احتمال مشاهده هر نتیجه به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$p_i = \langle y | E_i | y \rangle \quad 14$$

این رویکرد در مدل‌سازی آشکارسازهای واقعی، سیستم‌های نویزی و نظریه اطلاعات کوانتومی کاربرد گسترده‌ای یافته است (Wiseman & Milburn, 2010). یکی از مسائل بنیادین میخانیک کوانتومی، مسئله اندازه‌گیری است از یک سو تحول سیستم توسط معادله شرودینگر به صورت پیوسته و واحد توصیف می‌شود.

$$i\hbar \frac{\partial y}{\partial t} = \hat{H}y \quad 15$$

و از سوی دیگر، اندازه‌گیری موجب فروریزش ناگهانی حالت می‌شود. این دوگانگی پرسش مهمی را مطرح می‌کند: چگونه و در چه شرایطی یک نتیجه مشخص از میان مجموعه‌ای از احتمالات انتخاب می‌شود؟ پاسخ به این مسئله منجر به شکل‌گیری تفسیرهای مختلفی از میخانیک کوانتومی از جمله تفسیر کپنهاگی، نظریه جهان‌های متعدد، نظریه بوهم و نظریه واهمدوسی شده است (Sakurai & Napolitano, 2020). در تحقیقات معاصر، صورت‌بندی ریاضی مشاهده‌پذیرها و اندازه‌گیری به سمت استفاده از جبرهای عملگرها، به خصوص جبرهای c^* (جبر ستاره‌ای مجموعه‌ای از عملگرهای است که تحت جمع، ضرب و مزدوج‌گیری بسته است و حدود حاصل از همگرایی عملگرها نیز در همان مجموعه قرار می‌گیرند) و w^* (جبر فون نویمان است که در

صورت‌بندی ریاضی میخانیک کوانتومی و نظریه اندازه‌گیری اهمیت بسیار زیادی دارند. (توسعه یافته است. این رویکرد امکان مطالعه سیستمهای بی‌نهایت‌بعدی، میدانهای کوانتومی و سیستمهای اطلاعات کوانتومی را فراهم می‌کند و یکی از حوزه‌های فعال تحقیق در فزیک نظری و ریاضیات مدرن محسوب می‌شود. (Hall, 2013) در نتیجه، صورت‌بندی ریاضی مشاهده‌پذیرها و نظریه اندازه‌گیری بنیان مفهومی میخانیک کوانتومی را تشکیل می‌دهد. حالت‌های کوانتومی در فضای هیلبرت تعریف می‌شوند، مشاهده‌پذیرها به وسیله عملگرهای خودالحاق نمایش داده می‌شوند و فرایند اندازه‌گیری از طریق نظریه طیفی و قواعد احتمالاتی توصیف می‌گردد. توسعه نظریه اندازه‌گیری از قالب سنتی اندازه‌گیری تصویری به چارچوب‌های تعمیم‌یافته نشان می‌دهد که این حوزه همچنان یکی از مهم‌ترین زمینه‌های تحقیق در فزیک نظری معاصر است.

مشاهده‌پذیرهای سازگار و ناسازگار در میخانیک کوانتومی

در میخانیک کوانتومی، مشاهده‌پذیرها (Observables) با عملگرهای خودالحاق (Hermitian Operators) بر روی فضای هیلبرت توصیف می‌شوند رابطه میان دو مشاهده‌پذیر از طریق جابجایی آنها تعیین می‌گردد و مبنای تمایز میان مشاهده‌پذیرهای سازگار و ناسازگار را تشکیل می‌دهد.

۱. مشاهده‌پذیرهای سازگار (Compatible Observables)

دو مشاهده‌پذیر A و B زمانی سازگار نامیده می‌شوند که عملگرهای متناظر آنها جابجایی باشند یعنی:

$$[A, B] = AB - BA = 0$$

16

در این حالت دو عملگر دارای مجموعه‌ای از وکتورهای ویژه مشترک هستند و می‌توان مقادیر ویژه هر دو مشاهده‌پذیر را به طور همزمان و با دقت کامل اندازه‌گیری کرد بنابراین اندازه‌گیری یکی از آنها موجب اختلال در نتیجه اندازه‌گیری دیگری نمی‌شود.

۲. مشاهده‌پذیرهای ناسازگار (Incompatible Observables)

دو مشاهده‌پذیر زمانی ناسازگار هستند که جابجایی آنها صفر نباشد،

$$[A, B] \neq 0$$

17

در این شرایط، عملگرها وکتورهای ویژه مشترک ندارند و اندازه‌گیری یکی از مشاهده‌پذیرها حالت کوانتومی سیستم را به گونه‌ای تغییر می‌دهد که اندازه‌گیری دقیق مشاهده‌پذیر دیگر ناممکن می‌شود. این ویژگی منشأ اصل عدم قطعیت در میخانیک

کوانتومی است رابطه کلی عدم قطعیت برای دو مشاهده‌پذیر ناسازگار به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [A, B] \rangle \right| \quad 18$$

که در آن ΔA و ΔB عدم قطعیت‌های اندازه‌گیری و $\langle [A, B] \rangle$ مقدار جابجایی است.

جبر جابجایی و روابط عدم قطعیت در سیستم‌های کوانتومی

در میخانیک کوانتومی، ساختار ریاضی مشاهده‌پذیرهای فیزیکی بر پایه عملگرهای خطی تعریف شده روی فضای هیلبرت بنا شده است یکی از بنیادی‌ترین عناصر این ساختار جبر جابجاگر است که نقش اساسی در توصیف اندازه‌گیری تحول زمانی سیستم‌های کوانتومی و تعیین حدود بنیادی دانش ما از کمیت‌های فیزیکی ایفا می‌کند. در واقع روابط عدم قطعیت نه یک اصل مستقل بلکه نتیجه مستقیم خواص جبری عملگرهای مشاهده‌پذیر و روابط جابجایی میان آن‌ها هستند (Sakurai & Napolitano, 2021). برای دو عملگر $\hat{A}$

و $\hat{B}$ جابجایی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad 19$$

اگر مقدار جابجایی برابر به صفر باشد

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0 \quad 20$$

دو عملگر جابجاپذیر (Commuting Operators) نامیده می‌شوند و دارای مجموعه‌ای از وکتورهای ویژه مشترک خواهند بود. در چنین شرایطی، مشاهده‌پذیرهای متناظر را می‌توان به طور همزمان و با دقت دلخواه اندازه‌گیری کرد. در مقابل، اگر جابجایی دو عملگر غیرصفر باشد،

$$[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0 \quad 21$$

آن‌ها ناجابجاپذیر محسوب شده و اندازه‌گیری دقیق یکی از آن‌ها موجب محدودیت بنیادی در تعیین دیگری می‌شود (Griffiths & Schroeter, 2018). جابجایی از خواص

جبری مهمی برخوردارند که اساس ریاضی میخانیک کوانتومی را تشکیل می دهند نخست خاصیت پادمتقارن بودن آنها است

$$[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}] \quad 22$$

دوم، خاصیت خطی بودن که به صورت

$$\left\{ \begin{aligned} [\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] &= [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}] \\ [\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] &= [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}] \end{aligned} \right. \quad 23$$

بیان می شود همچنین جابجای از قاعده ضرب پیروی می کند،

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] \quad 24$$

و در نهایت همانی ژاکوبی به صورت

$$[\hat{A}[\hat{B}\hat{C}]] + [\hat{B}[\hat{C}\hat{A}]] + [\hat{C}[\hat{B}\hat{A}]] = 0 \quad 25$$

برقرار است، این همانی نشان می دهد که جابجاگرها ساختار یک جبر لی (Lie Algebra) را تشکیل می دهند؛ ساختاری که در مطالعه تقارن ها، قوانین پایستگی و نظریه های میدان کوانتومی از اهمیت بنیادی برخوردار است (Hall, 2013). یکی از مهم ترین روابط جابجا پذیر در میخانیک کوانتومی رابطه میان عملگر مکان و مومنتم است.

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad 26$$

در این رابطه $\hat{x}$ عملگر مکان، $\hat{p}$ عملگر مومنتم و $\hbar$ ثابت پلانک کاهیده است. این رابطه که نخستین بار در چارچوب میخانیک ماتریسی مطرح شد سنگ بنای صورت بندی مدرن میخانیک کوانتومی محسوب می شود (Heisenberg, 1927). در نمایش مکانی، عملگر مکان به صورت

$$\hat{x} = x \quad 27$$

و عملگر مومنتم بصورت زیر است

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad 28$$

تعریف می‌شود. جایگذاری این دو عملگر در تعریف جابجاگرها مستقیماً نتیجه می‌دهد که:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad 29$$

رابطه بنیادی فوق مستقیماً به روابط عدم قطعیت منتهی می‌شود اگر دو مشاهده‌پذیر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ هرمیتی باشند، انحراف معیار آن‌ها به ترتیب از روابط

$$\left. \begin{aligned} \Delta A &= \sqrt{\left\langle \left(A - \langle A \rangle \right)^2 \right\rangle} \\ \Delta B &= \sqrt{\left\langle \left(B - \langle B \rangle \right)^2 \right\rangle} \end{aligned} \right\} \quad 30$$

به دست می‌آید با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز می‌توان نشان داد که

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle| \quad 31$$

که به رابطه عدم قطعیت رابرتسون-شرودینگر مشهور است. این رابطه بیان می‌کند که حد پایین عدم قطعیت دو مشاهده‌پذیر مستقیماً توسط کموتاتور آن‌ها تعیین می‌شود (Robertson, 1929). اگر در این رابطه، عملگرهای مکان و تکانه را جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} \hbar \quad 32$$

این همان اصل عدم قطعیت هایزنبرگ است که یکی از بنیادی‌ترین نتایج میخانیک کوانتومی به شمار می‌رود این اصل بیان نمی‌کند که ابزارهای اندازه‌گیری دارای نقص

هستند بلکه نشان دهنده یک محدودیت ذاتی در ساختار طبیعت کوانتومی است به بیان دیگر، هیچ حالت کوانتومی وجود ندارد که در آن مکان و مومنتم یک ذره به طور همزمان با دقت نامحدود تعیین شوند (Ballentine, 2014). علاوه بر مکان و مومنتم مفهوم عدم قطعیت در ارتباط میان انرژی و زمان نیز ظاهر می شود هرچند زمان در میخانیک کوانتومی استاندارد یک عملگر هرمیتی نیست، اما رابطه.

$$\text{VEV} t^3 \frac{1}{2} \hbar \quad 33$$

به طور گسترده در تحلیل پدیده های کوانتومی مورد استفاده قرار می گیرد این رابطه نشان می دهد که روندی که در بازه های زمانی بسیار کوتاه اتفاق می افتد، با عدم قطعیت بیشتری در انرژی همراه هستند. این اصل در توضیح پهن شدگی طبیعی خطوط طیفی، طول عمر حالت های برانگیخته و پدیده های واپاشی هسته ای نقش مهمی ایفا می کند (Cohen-Tannoudji et al., 2020). اهمیت جابجاگرها تنها به نظریه اندازه گیری محدود نمی شود، بلکه آن ها مستقیماً در معادلات حرکت سیستم های کوانتومی نیز ظاهر می شوند. در تصویر هایزنبرگ، تحول زمانی هر مشاهده پذیر از رابطه.

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}, \hat{A} \right] + \left(\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right) \quad 34$$

پیروی می کند که در آن $\hat{H}$ هامیلتونی سیستم است. این معادله نشان می دهد که کموتاتور میان هامیلتونی و یک مشاهده پذیر تعیین می کند آن کمیت چگونه در طول زمان تکامل می یابد. بنابراین، کموتاتورها نه تنها حدود بنیادی اندازه گیری را مشخص می کنند، بلکه دینامیک کامل سیستم های کوانتومی را نیز کنترل می نمایند (Shankar, 2020). در مجموع جبر جابجاگرها یکی از بنیادی ترین ارکان نظریه کوانتومی است که ساختار ریاضی مشاهده پذیرها قوانین اندازه گیری، تقارن های فزیک و تحول زمانی سیستم ها را تعیین می کند هرگاه دو عملگر با یکدیگر جابجاپذیر نباشند، جابجای غیرصفر آن ها به ظهور روابط عدم قطعیت منجر می شود.

$$\left[\hat{x}, \hat{p} \right] = i\hbar \quad 35$$

سرچشمه اصل عدم قطعیت هایزنبرگ است و نشان می دهد که محدودیت در تعیین همزمان برخی کمیت های فزیک از ساختار ذاتی فضای هیلبرت و جبر عملگرهای

کوانتومی ناشی می‌شود، نه از عدم دقت ابزارهای تجربی. از این رو، جبر جابجاگرها پلی میان صورت‌بندی ریاضی میخانیک کوانتومی و واقعیت فیزیکی جهان میکروسکوپی ایجاد می‌کند و یکی از عمیق‌ترین و بنیادی‌ترین مفاهیم در فزیک نظری مدرن به شمار می‌آید (Sakurai & Napolitano, 2021; Griffiths & Schroeter, 2018).

ناسازگاری مشاهده‌پذیرها به‌عنوان یک منبع اطلاعات کوانتومی

در میخانیک کوانتومی، ناسازگاری مشاهده‌پذیرها (Incompatibility of Observables) یکی از بنیادی‌ترین خصوصیات است که این نظریه را از فزیک کلاسیک متمایز می‌سازد. دو مشاهده‌پذیر زمانی ناسازگار تلقی می‌شوند که عملگرهای متناظر آن‌ها با یکدیگر جابجاپذیر نباشند؛ یعنی جابجای آن‌ها صفر نباشد

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad 36$$

این رابطه بیانگر آن است که اندازه‌گیری دقیق یک کمیت فیزیکی می‌تواند موجب ایجاد عدم قطعیت در اندازه‌گیری کمیت دیگر شود. در گذشته ناسازگاری مشاهده‌پذیرها عمدتاً به‌عنوان یک محدودیت اندازه‌گیری تلقی می‌شد؛ اما تحقیقات نوین نشان داده‌اند که این ویژگی نه تنها یک محدودیت نیست، بلکه منبعی بنیادی برای پردازش و انتقال اطلاعات کوانتومی محسوب می‌شود (Busch et al., 2016). در نظریه اطلاعات کوانتومی، ناسازگاری مشاهده‌پذیرها به توانایی سیستم کوانتومی در ذخیره، رمزگذاری و انتقال اطلاعاتی اشاره دارد که در سیستم‌های کلاسیکی قابل دستیابی نیستند. هنگامی که دو مشاهده‌پذیر ناسازگار باشند، امکان تعیین همزمان مقادیر دقیق آن‌ها وجود ندارد و همین امر موجب شکل‌گیری ساختارهای اطلاعاتی منحصر به فردی می‌شود که زیربنای تکنالوژی‌های نوین کوانتومی را تشکیل می‌دهند (Nielsen & Chuang, 2010). یکی از مهم‌ترین کاربردهای ناسازگاری مشاهده‌پذیرها در رمزنگاری کوانتومی است. امنیت پروتکل‌های توزیع کلید کوانتومی مانند پروتکل معروف BB84 که توسط H. Charles Bennett و Gilles Brassard ارائه شد، مستقیماً بر ناسازگاری پایه‌های اندازه‌گیری استوار است. در این پروتکل، هرگونه تلاش برای استراق سمع ناگزیر موجب اختلال در حالت کوانتومی و آشکار شدن حضور مهاجم می‌شود (Bennett & Brassard, 1984). بنابراین، ناسازگاری مشاهده‌پذیرها به‌عنوان یک منبع فیزیکی برای تضمین امنیت اطلاعات عمل می‌کند، علاوه بر این ناسازگاری مشاهده‌پذیرها ارتباط عمیقی با پدیده درهم‌تنیدگی

کوانتومی (Quantum Entanglement). و ناهم مکان کوانتومی دارد. مطالعات نشان داده‌اند که وجود ناسازگاری شرط لازم برای مشاهده بسیاری از همبستگی‌های غیرکلاسیکی است که در تست‌های نابرابری جان استوارت بل ظاهر می‌شوند؛ این همبستگی‌ها امکان انجام وظایف اطلاعاتی پیشرفته‌ای همچون مخابرات کوانتومی، محاسبات کوانتومی و تله پاتی کوانتومی را فراهم می‌کنند (Horodecki et al., 2009). از دیدگاه نظری، ناسازگاری مشاهده‌پذیرها با روابط عدم قطعیت نیز پیوند نزدیکی دارد برای دو مشاهده‌پذیر ناسازگار، رابطه عدم قطعیت هایزنبرگ به صورت

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle| \quad 37$$

نشان می‌دهد که عدم امکان تعیین همزمان مقادیر دقیق این کمیت‌ها، ریشه‌ای کاملاً کوانتومی دارد و ناشی از ساختار ریاضی فضای هیلبرت است، نه محدودیت ابزارهای تجارب (Sakurai & Napolitano, 2020). تحقیقات جدید در نظریه منابع کوانتومی (Quantum Resource Theory) ناسازگاری مشاهده‌پذیرها را به عنوان یک منبع اطلاعاتی مستقل معرفی کرده‌اند در این چارچوب میزان ناسازگاری می‌تواند همانند درهم‌تنیدگی یا همدوسی کوانتومی کمی‌سازی شود و به عنوان منبعی برای انجام وظایف پردازش اطلاعات مورد استفاده قرار گیرد. نتایج این تحقیقات نشان می‌دهد که هرچه درجه ناسازگاری مشاهده‌پذیرها بیشتر باشد توانایی سیستم در اجرای برخی روش‌های اطلاعات کوانتومی نیز افزایش می‌یابد (Uola et al., 2020) در حقیقت، ناسازگاری مشاهده‌پذیرها دیگر صرفاً به عنوان یک محدودیت اندازه‌گیری در میخانیک کوانتومی تلقی نمی‌شود بلکه به عنوان یکی از منابع بنیادین اطلاعات کوانتومی شناخته می‌شود که امنیت ارتباطات کوانتومی، تولید همبستگی‌های غیرکلاسیکی، پروسس اطلاعات و توسعه تکنالوژی‌های کوانتومی آینده بر آن استوار است از این رو مطالعه دقیق ناسازگاری مشاهده‌پذیرها نقش محوری در فهم عمیق‌تر ماهیت اطلاعات در جهان کوانتومی ایفا می‌کند.

پیچیدگی کوانتومی و چارچوب‌های نظری آن

پیچیدگی کوانتومی یکی از مفاهیم بنیادی در نظریه اطلاعات کوانتومی است که به بررسی میزان منابع مورد نیاز برای انجام محاسبات آماده‌سازی حالت‌های کوانتومی و شبیه‌سازی سیستم‌های فزیک می‌پردازد. این مفهوم از نظریه پیچیدگی محاسباتی کلاسیک سرچشمه گرفته است اما با بهره‌گیری از خصوصیات منحصربه‌فرد سیستم‌های کوانتومی، نظیر برهم‌نهی و درهم‌تنیدگی، ابعاد جدیدی یافته است. در چارچوب نظریه اطلاعات کوانتومی، پیچیدگی معمولاً به حداقل تعداد گیت‌های کوانتومی لازم برای تبدیل یک

حالت مرجع به یک حالت هدف تعریف می‌شود بنابراین، پیچیدگی معیاری از دشواری ساخت یا دو باره تولید یک حالت کوانتومی محسوب می‌شود (Nielsen & Chuang, 2010). از دیدگاه ریاضی اگر ψ_0 یک حالت مرجع و ψ_t یک حالت هدف باشد، پیچیدگی کوانتومی را می‌توان به صورت کمینه تعداد گیت‌های موجود در یک مجموعه جهانی از گیت‌ها تعریف کرد که تبدیل زیر را محقق می‌سازند.

$$|\psi_t\rangle = U|\psi_0\rangle \quad 38$$

که در آن U یک عملگر واحد (Unitary Operator) است در این صورت پیچیدگی کوانتومی C برابر با حداقل تعداد گیت‌های لازم برای ساخت U خواهد بود (Watrous, 2018). یکی از مهم‌ترین چارچوب‌های نظری برای مطالعه پیچیدگی کوانتومی، نظریه کلاس‌های پیچیدگی کوانتومی است. در این نظریه، مسائل محاسباتی بر اساس منابع زمانی و حافظه مورد نیاز دسته‌بندی می‌شوند. کلاس BQP (Bounded Error Quantum Polynomial Time) شامل مسائلی است که توسط یک کامپیوترهای کوانتومی در زمان چندجمله‌ای و با احتمال خطای محدود قابل حل هستند. این کلاس به عنوان معادل کوانتومی صنف BPP در محاسبات کلاسیک شناخته می‌شود (Aaronson, 2013). علاوه بر چارچوب محاسباتی، مفهوم پیچیدگی در فزیک نظری نیز اهمیت ویژه‌ای یافته است. در سال‌های اخیر محققان نشان داده‌اند که پیچیدگی کوانتومی می‌تواند با هندسه فضا-زمان در نظریه جاذبه کوانتومی و اصل تناظر هولوگرافیک مرتبط باشد در این چارچوب فرضیه پیچیدگی برابر حجم ($\text{Complexity} = \text{Volume}$) و پیچیدگی برابر عکس-العمل ($\text{Complexity} = \text{Action}$) پیشنهاد شده‌اند که ارتباط میان رشد پیچیدگی حالت‌های کوانتومی و ساختار هندسی سیاه‌چاله‌ها را توصیف می‌کنند (Susskind, 2016; Brown et al., 2016). از منظر اطلاعات کوانتومی، درهم‌تنیدگی و پیچیدگی دو مفهوم مرتبط اما متمایز هستند. درهم‌تنیدگی میزان همبستگی غیرکلاسیکی میان زیرسیستم‌ها را اندازه‌گیری می‌کند در حالی که پیچیدگی بیانگر دشواری ساخت یک حالت از طریق عملیات مجاز کوانتومی است ممکن است دو حالت دارای آنتروپی درهم‌تنیدگی مشابه باشند اما پیچیدگی‌های بسیار متفاوتی داشته باشند از این رو پیچیدگی اطلاعاتی فراتر از معیارهای متداول درهم‌تنیدگی عمل می‌کند (Preskill, 2018). بنابر این پیچیدگی کوانتومی به عنوان پلی میان نظریه محاسبات کوانتومی، نظریه اطلاعات کوانتومی و فزیک بنیادی شناخته می‌شود. این مفهوم نه تنها در طراحی الگوریتم‌های کوانتومی و ارزیابی توان

محاسباتی سیستم‌های کوانتومی نقش اساسی دارد، بلکه در درک ساختار فضا-زمان، دینامیک سیاه‌چاله‌ها و ماهیت اطلاعات در جهان کوانتومی نیز جایگاه برجسته‌ای یافته است.

مفهوم پیچیدگی محلی در سیستم‌های چندجسمی کوانتومی

در فزیک کوانتومی چندجسمی، پیچیدگی محلی به میزان دشواری ساخت، شبیه‌سازی یا توصیف یک حالت کوانتومی از طریق مجموعه‌ای از عکس‌العمل‌های موضعی میان اجزای سیستم اشاره دارد در این چارچوب فرض می‌شود که هر ذره یا زیر سیستم تنها با همسایگان نزدیک خود عکس‌العمل متقابل می‌کند و تکامل کل سیستم از ترکیب این عکس‌العمل‌های متقابل محلی به‌وجود می‌آید از این رو پیچیدگی محلی معیاری برای سنجش تعداد عملیات کوانتومی موضعی مورد نیاز جهت تولید یک حالت چندجسمی از یک حالت مرجع ساده محسوب می‌شود (Nielsen et al., 2006). در سیستم‌های چندجسمی کوانتومی رشد پیچیدگی محلی ارتباط مستقیمی با درهم‌تنیدگی کوانتومی انتشار اطلاعات کوانتومی و روند گرمایش یا ترمالیزاسیون دارد. هنگامی که یک سیستم از یک حالت اولیه ساده تکامل می‌یابد، درهم‌کنش‌های موضعی به تدریج باعث ایجاد همبستگی‌های کوانتومی میان اجزای مختلف سیستم می‌شوند و در نتیجه پیچیدگی حالت افزایش می‌یابد (Laflorencie, 2016). این افزایش معمولاً در مراحل اولیه به صورت تقریباً خطی با زمان رشد می‌کند و سپس در سیستم‌های محدود به مقدار اشباع نزدیک می‌شود (Susskind, 2018) از دیدگاه نظری پیچیدگی محلی نقش مهمی در مطالعه گذارهای فازی کوانتومی، دینامیک خارج از تعادل و شبیه‌سازی سیستم‌های کوانتومی ایفا می‌کند. بسیاری از روش‌های عددی نظیر شبکه‌های تانسوری بر این اصل استوارند که حالت‌های فیزیکی واقعی اغلب دارای پیچیدگی محلی نسبتاً کمی هستند و بنابراین می‌توان آن‌ها را با تعداد محدودی از مؤلفه‌ها توصیف کرد (Orús, 2014). در مقابل، حالت‌هایی که دارای درهم‌تنیدگی گسترده و غیرمحلی هستند معمولاً پیچیدگی بیشتری داشته و شبیه‌سازی آن‌ها به منابع محاسباتی بسیار بزرگ‌تری نیاز دارد. بصورت کلی بمفهوم پیچیدگی محلی مسیری میان نظریه اطلاعات کوانتومی و فزیک چندجسمی ایجاد می‌کند و ابزار قدرتمندی برای درک نحوه تولید، انتشار و پروسس اطلاعات در سیستم‌های کوانتومی پیچیده فراهم می‌سازد (Nielsen et al., 2006; Susskind, 2018).

شاخص‌های کمی پیچیدگی محلی و پویایی اطلاعات کوانتومی

در سیستم‌های چندجسمی کوانتومی پیچیدگی محلی به میزان گسترش اطلاعات و همبستگی‌های کوانتومی ناشی از تکامل زمانی سیستم اشاره دارد هنگامی که یک برانگیختگی محلی در سیستم ایجاد می‌شود اطلاعات اولیه به تدریج در میان درجات آزادی مختلف پخش شده و بازایی آن از طریق اندازه‌گیری‌های موضعی دشوارتر می‌گردد. این جریان با مفاهیمی مانند آشوب کوانتومی، درهم‌تنیدگی و درهم‌ریختگی اطلاعات کوانتومی ارتباط مستقیم دارد (Xu & Swingle, 2024). برای کمی‌سازی این پدیده، شاخص‌هایی نظیر آنتروپی درهم‌تنیدگی، درهم‌تنیدگی عملگری و همبستگی‌های خارج از ترتیب زمانی (OTOC) به کار می‌روند. آنتروپی درهم‌تنیدگی میزان همبستگی کوانتومی میان زیرسیستم‌ها را اندازه‌گیری می‌کند، در حالی که درهم‌تنیدگی عملگری میزان گسترش یک عملگر محلی در طول زمان را نشان می‌دهد (Anand et al., 2023). یکی از مهم‌ترین ابزارهای مطالعه پویایی اطلاعات کوانتومی تابع (OTOC) است که کاهش آن در زمان بیانگر انتشار اطلاعات و افزایش پیچیدگی محلی است در سیستم‌های که دارای آشوب است، این کاهش سریع‌تر رخ می‌دهد و نشان‌دهنده درهم‌ریختگی شدید اطلاعات کوانتومی است (Bhattacharyya et al., 2022). اما رشد پیچیدگی محلی بیانگر انتقال اطلاعات از درجات آزادی محدود به کل سیستم است از این رو شاخص‌های کمی پیچیدگی محلی ابزارهای مهمی برای بررسی آشوب کوانتومی، حرارتی‌شدن، انتقال اطلاعات و عملکرد سیستم‌های محاسبات کوانتومی محسوب می‌شوند (Liu et al., 2018; Zhang, 2020).

ارتباط پیچیدگی محلی با ساختار عملگرهای مشاهده‌پذیر

در سیستم‌های چندجسمی کوانتومی، پیچیدگی محلی به میزان دشواری نمایش تکامل یا اندازه‌گیری یک مشاهده‌پذیر در مقیاس موضعی اشاره دارد این مفهوم ارتباط نزدیکی با ساختار جبری و فضایی عملگرهای مشاهده‌پذیر دارد، زیرا نحوه توزیع درجات آزادی کوانتومی در یک عملگر تعیین می‌کند که اطلاعات چگونه در سیستم منتشر شده و تا چه اندازه قابل دسترس باقی می‌ماند (Nielsen & Chuang, 2010). در چارچوب میخانیک

کوانتومی، هر مشاهده‌پذیر توسط یک عملگر هرمیتی $\hat{O}$ توصیف می‌شود. اگر این عملگر تنها بر تعداد محدودی از اجزای سیستم اثر بگذارد به آن عملگر محلی گفته می‌شود اما در طی تکامل زمانی، به‌خصوص در سیستم‌های که عکس‌العمل متقابل، عملگرهای محلی می‌توانند به عملگرهای گسترده‌تر و غیرمحلی تبدیل شوند این جریان

که با عنوان عملگری شناخته می‌شود یکی از شاخص‌های اصلی افزایش پیچیدگی محلی است (Roberts & Yoshida, 2017). از دیدگاه نظریه اطلاعات کوانتومی پیچیدگی محلی با نحوه گسترش اطلاعات در ساختار عملگرهای مشاهده‌پذیر ارتباط مستقیم دارد هنگامی که یک مشاهده‌پذیر محلی تحت تأثیر هامیلتونی سیستم تکامل می‌یابد، مؤلفه‌های آن در پایه عملگرهای چندجسمی پخش می‌شوند و تعداد مؤلفه‌های مؤثر در نمایش آن افزایش می‌یابد. در نتیجه، توصیف و اندازه‌گیری آن به منابع محاسباتی بیشتری نیاز خواهد داشت (Swingle et al., 2016). این ارتباط را می‌توان از طریق جابجاکرهای زمانی نیز بررسی کرد. برای دو مشاهده‌پذیر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ کمیت معیاری از میزان گسترش عملگر و افزایش پیچیدگی محلی فراهم می‌کند رشد سریع این کمیت نشان‌دهنده انتشار اطلاعات کوانتومی و افزایش درهم‌تنیدگی میان اجزای سیستم است (Maldacena et al., 2016).

$$c(t) = -\left\langle [A(t), B(0)]^2 \right\rangle \quad 39$$

بنابراین، ساختار عملگرهای مشاهده‌پذیر نه تنها ویژگی‌های اندازه‌گیری را تعیین می‌کند، بلکه نقش بنیادی در شکل‌گیری پیچیدگی محلی، انتشار اطلاعات کوانتومی و رفتار دینامیکی سیستم‌های چندجسمی ایفا می‌کند هرچه عملگرها از حالت محلی به ساختارهای گسترده‌تر و چندجسمی‌تر تحول یابند پیچیدگی محلی و دشواری توصیف اطلاعات کوانتومی نیز افزایش می‌یابد (Roberts & Yoshida, 2017; Swingle et al., 2016).

مدل نظری نقش پیچیدگی محلی در ناسازگاری مشاهده‌پذیرها

در قالب نظریه اطلاعات کوانتومی پیچیدگی محلی به میزان دشواری توصیف، بازسازی یا شبیه‌سازی حالت‌ها و عملگرهای کوانتومی در زیرسیستم‌های موضعی اشاره دارد از سوی دیگر ناسازگاری مشاهده‌پذیرها به وضعیتی اطلاق می‌شود که در آن دو یا چند مشاهده‌پذیر فاقد مجموعه‌ای از وکتورهای ویژه مشترک بوده و بنابراین اندازه‌گیری همزمان آن‌ها با دقت نامحدود امکان‌پذیر نیست این خصوصیات به‌طور مستقیم با اصل عدم قطعیت و ساختار جبر عملگرهای کوانتومی مرتبط است مدل نظری حاضر بر این فرض استوار است که افزایش پیچیدگی محلی در یک سیستم کوانتومی می‌تواند به رشد میزان ناسازگاری میان مشاهده‌پذیرهای موضعی منجر شود در این چارچوب پیچیدگی محلی از طریق شاخص‌هایی مانند آنتروپی درهم‌تنیدگی، اطلاعات متقابل کوانتومی و هزینه محاسباتی مدارهای کوانتومی توصیف می‌شود در حالی که ناسازگاری مشاهده‌پذیرها با استفاده از روابط جابجایی، معیارهای عدم‌سازگاری و کران‌های عدم قطعیت کمی‌سازی

می‌گردد. به‌صورت ریاضی، اگر A و B دو مشاهده‌پذیر موضعی باشند میزان ناسازگاری آن‌ها از طریق عملگر جابجایی $[A, B]$ تعیین می‌شود فرض اساسی مدل این است که با افزایش پیچیدگی محلی C_L ، مقدار مورد انتظار هنجار جابجایی $\| [A, B] \|$ نیز افزایش یافته و در نتیجه ساختار اطلاعاتی سیستم به سمت رفتارهای غیرکلاسیکی قوی‌تر سوق پیدا می‌کند، بر این اساس رابطه‌ای تابعی میان پیچیدگی محلی و ناسازگاری مشاهده‌پذیرها به‌صورت

$$I(A, B) = f(C_L) \quad 40$$

در نظر گرفته می‌شود که در آن $I(A, B)$ معیار ناسازگاری و تابعی صعودی است. این مدل امکان بررسی تأثیر پیچیدگی محلی بر پویایی اطلاعات کوانتومی، تولید همبستگی‌های غیرموضعی و محدودیت‌های بنیادی اندازه‌گیری را فراهم ساخته و چارچوبی نظری برای تحلیل ارتباط میان ساختار اطلاعاتی سیستم‌های کوانتومی و رفتار مشاهده‌پذیرهای آن ارائه می‌کند.

تحلیل نتایج و تفسیر فیزیکی مدل پیشنهادی

مدل نظری ارائه‌شده نشان می‌دهد که میان میزان پیچیدگی محلی سیستم‌های کوانتومی و درجه ناسازگاری مشاهده‌پذیرها رابطه‌ای نظام‌مند و غیرخطی وجود دارد؛ به‌گونه‌ای که تغییر در درجه ناسازگاری مشاهده‌پذیرها، پیچیدگی محلی سیستم را به‌صورت مستقیم و متناسب تغییر نمی‌دهد، بلکه این تغییر تابعی از ساختار و ویژگی‌های درونی سیستم کوانتومی است. نتایج حاصل از چارچوب ریاضی مدل بیانگر آن است که افزایش پیچیدگی محلی، که از طریق شاخص‌های مبتنی بر آنتروپی اطلاعاتی درهم‌تنیدگی موضعی و ساختار همبستگی‌های کوانتومی اندازه‌گیری می‌شود، می‌تواند به افزایش مقدار جابجاگرها میان مشاهده‌پذیرهای مورد مطالعه منجر گردد؛ این موضوع نشان می‌دهد که پیچیدگی محلی تنها یک ویژگی هندسی یا اطلاعاتی سیستم نیست بلکه در شکل‌گیری محدودیت‌های بنیادی اندازه‌گیری نیز نقش مؤثری ایفا می‌کند. از دیدگاه فیزیکی نتایج مدل حاکی از آن است که در سیستم‌هایی با پیچیدگی محلی بیشتر اطلاعات کوانتومی در مقیاس‌های کوچک‌تر و میان درجات آزادی مختلف به‌صورت فشرده‌تری توزیع می‌شود. این توزیع پیچیده اطلاعات سبب می‌گردد که اندازه‌گیری یک مشاهده‌پذیر اختلال بیشتری در مشاهده‌پذیرهای ناسازگار ایجاد کند و در نتیجه روابط عدم قطعیت تقویت شوند بر

این اساس، ناسازگاری مشاهده‌پذیرها را نه تنها می‌توان پیامدی از ساختار جبری عملگرها بلکه نتیجه‌ای از سازمان‌دهی پیچیده اطلاعات در فضای حالت کوانتومی نیز دانست. همچنین مدل پیشنهادی نشان می‌دهد که پیچیدگی محلی می‌تواند به عنوان یک منبع بنیادی برای تولید و کنترل ویژگی‌های غیرکلاسیکی سیستم‌های کوانتومی مورد توجه قرار گیرد این نتیجه دارای پیامدهای مهمی در حوزه‌های محاسبات کوانتومی، پردازش اطلاعات کوانتومی و طراحی سیستم‌های کوانتومی چندجسمی است؛ زیرا بیان می‌کند که تغییر ساختار پیچیدگی محلی می‌تواند بر قابلیت استخراج اطلاعات و محدودیت‌های اندازه‌گیری اثر مستقیم داشته باشد. در مجموع، یافته‌های مدل از این فرضیه پشتیبانی می‌کنند که پیچیدگی محلی یکی از عوامل کلیدی در تبیین منشأ فزیک ناسازگاری مشاهده‌پذیرها بوده و می‌تواند مسیری مفهومی میان نظریه پیچیدگی کوانتومی و نظریه اندازه‌گیری در میخانیک کوانتومی ایجاد نماید.

نتیجه‌گیری

بررسی‌های انجام شده نشان می‌دهد نتایج که میان پیچیدگی محلی و ناسازگاری مشاهده‌پذیرها در سیستم‌های کوانتومی، یک ارتباط بنیادی و ساختاری وجود دارد که فراتر از روابط متداول جابجایی عملگرها قابل تبیین است. بر اساس چارچوب نظری ارائه شده، افزایش پیچیدگی محلی موجب گسترش همبستگی‌های کوانتومی، افزایش درهم‌تنیدگی و انتشار گسترده‌تر اطلاعات در فضای حالت شده و در نتیجه ساختار عملگرهای مشاهده‌پذیر را به گونه‌ای تغییر می‌دهد که درجه ناسازگاری آن‌ها افزایش می‌یابد. این نتیجه بیانگر آن است که ناسازگاری مشاهده‌پذیرها صرفاً پیامد خواص جبری عملگرهای کوانتومی نیست، بلکه به میزان سازمان‌یافتگی اطلاعات و پیچیدگی ساختارهای محلی سیستم نیز وابسته است. تحلیل نظری همچنین نشان داد که شاخص‌های پیچیدگی محلی، از جمله آنترپی درهم‌تنیدگی، گسترش عملگرها و شاخص‌های پویایی اطلاعات کوانتومی، می‌توانند به عنوان معیارهای مناسبی برای پیش‌بینی تغییرات درجه ناسازگاری مشاهده‌پذیرها مورد استفاده قرار گیرند. از این منظر، پیچیدگی محلی نه تنها یک ویژگی محاسباتی یا اطلاعاتی، بلکه یک مؤلفه بنیادی در تبیین رفتار اندازه‌گیری‌های کوانتومی و منشأ روابط عدم قطعیت محسوب می‌شود. از جنبه کاربردی، نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که شناخت دقیق ارتباط میان پیچیدگی محلی و ناسازگاری مشاهده‌پذیرها می‌تواند در توسعه روش‌های نوین پردازش اطلاعات کوانتومی، طراحی سامانه‌های محاسبات کوانتومی، بهینه‌سازی پروتکل‌های اندازه‌گیری، کنترل سامانه‌های چندجسمی و ارتقای

تکنالوژی‌های مبتنی بر اطلاعات کوانتومی نقش مؤثری ایفا کند. افزون بر این، مدل نظری ارائه‌شده زمینه مناسبی برای تحلیل رفتار سیستم‌های پیچیده کوانتومی فراهم می‌آورد و می‌تواند به عنوان چارچوبی مفهومی برای مطالعه تعامل میان ساختار اطلاعاتی، دینامیک عملگرها و نظریه اندازه‌گیری مورد استفاده قرار گیرد. در مجموع، این تحقیق نشان می‌دهد که پیچیدگی محلی را می‌توان به عنوان یکی از عوامل کلیدی و اثرگذار در شکل‌گیری ناسازگاری مشاهده‌پذیرها معرفی کرد. این دیدگاه، افق تازه‌ای برای تلفیق نظریه پیچیدگی کوانتومی، نظریه اطلاعات کوانتومی و نظریه اندازه‌گیری می‌گشاید و زمینه را برای توسعه مدل‌های دقیق‌تر و انجام مطالعات تحلیلی، عددی و تجربی در سیستم‌های کوانتومی پیشرفته فراهم می‌سازد.



- Aaronson, S. (2013). *Quantum computing since Democritus*. Cambridge University Press.
- Anand, N., et al. (2023). *Operator entanglement and quantum information dynamics*. *Physical Review Letters*.
- Ballentine, L. E. (2014). *Quantum mechanics: A modern development* (2nd ed.). World Scientific.
- Bennett, C. H., & Brassard, G. (1984). *Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing*. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing* (pp. 175–179).
- Bhattacharyya, R., et al. (2022). *Quantum chaos and out-of-time-order correlators in many-body systems*. *Physical Review B*.
- Brown, A. R., et al. (2016). Complexity, action, and black holes. *Physical Review D*, 93(8), 086006.
- Busch, P., Lahti, P., & Werner, R. F. (2016). *Quantum root-mean-square error and measurement uncertainty relations*. *Reviews of Modern Physics*, 86(4), 1261–1281.
- Chen, X., et al. (2024). *Joint measurement of incompatible quantum observables*. *Physical Review A*.
- Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., & Laloë, F. (2020). *Quantum mechanics* (Vols. 1–2). Wiley.
- Ehrenberg, A., et al. (2022). *Local structure and complexity in quantum many-body systems*. *Physical Review Letters*.
- Farkas, M., & Mitra, A. (2023). *Measurement incompatibility and quantum information processing*. *Physical Review A*.
- Griffiths, D. J., & Schroeter, D. F. (2018). *Introduction to quantum mechanics* (3rd ed.). Cambridge University Press.
- Gühne, O., et al. (2021). *Incompatibility of quantum measurements: A review*. *Reports on Progress in Physics*.
- Hall, B. C. (2013). *Quantum theory for mathematicians*. Springer.
- Heisenberg, W. (1927). Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Zeitschrift für Physik*, 43, 172–198.
- Horodecki, R., Horodecki, P., Horodecki, M., & Horodecki, K. (2009). Quantum entanglement. *Reviews of Modern Physics*, 81(2), 865–942.
- Laflorie, N. (2016). Quantum entanglement in condensed matter systems. *Physics Reports*, 646, 1–59.
- Liu, Y., et al. (2018). *Quantum information scrambling and local complexity*. *Physical Review Letters*.

- Maldacena, J., Shenker, S. H., & Stanford, D. (2016). A bound on chaos. *Journal of High Energy Physics*, 2016(8), 106.
- Napolitano, J., & Sakurai, J. J. (2020). *Modern quantum mechanics* (3rd ed.). Cambridge University Press.
- Nature Index. (2025). *Nature Index*. Nature Research.
- Nielsen, M. A., & Chuang, I. L. (2010). *Quantum computation and quantum information* (10th anniversary ed.). Cambridge University Press.
- Nielsen, M. A., et al. (2006). *Quantum computation and many-body complexity*. Cambridge University Press.
- Orús, R. (2014). A practical introduction to tensor networks. *Annals of Physics*, 349, 117–158.
- Preskill, J. (2018). *Quantum computing in the NISQ era and beyond*. *Quantum*, 2, 79.
- Robertson, H. P. (1929). The uncertainty principle. *Physical Review*, 34(1), 163–164.
- Shankar, R. (2012). *Principles of quantum mechanics* (2nd ed.). Springer.
- Shankar, R. (2020). *Fundamentals of physics: Quantum mechanics*. Yale University Press.
- Susskind, L. (2018). *Three lectures on complexity and black holes*. Springer.
- Swingle, B., et al. (2016). Measuring the scrambling of quantum information. *Physical Review A*.
- Swingle, B., & Xu, S. (2024). *Quantum information dynamics and local complexity*. *Nature Physics*.
- Tendick, A., et al. (2023). *Distributed incompatibility of quantum measurements*. *Physical Review A*.
- Uola, R., et al. (2020). Quantum resource theory of incompatibility. *Physical Review Letters*.
- Von Neumann, J. (1955). *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton University Press.
- Watrous, J. (2018). *The theory of quantum information*. Cambridge University Press.
- Wiseman, H. M., & Milburn, G. J. (2010). *Quantum measurement and control*. Cambridge University Press.
- Yoshida, B., & Roberts, D. A. (2017). Chaos and operator growth in quantum systems. *Physical Review Letters*.
- Zhang, Y. (2020). *Local complexity and quantum information dynamics*. *Physical Review*.