فراه علمي-څېړنيز ژورنال Vol: 3, Issue: 1 year: 2026, 1447, 1404

مروری بر تحلیل نظری مشتقات توابع متعالی در ریاضیات عالی

پوهنمل جاوید هاشمی[1*] ، پوهنمل محمد حسین فراهی[2]، پوهنیار عبدالوارث صدیقی[3]
رشته ریاضی[1و2]، رشته فزیک[3]، پوهنځی تعلیم و تربیه پوهنتون فراه
ایمیل: jawidhashemi4@gmail.com

چکیده

توابع متعالی به‌عنوان یکی از ارکان اساسی انالیز ریاضی، نقش مهمی در گسترش مفاهیم نظری ریاضیات عالی ایفاء می‌کنند. مشتقات این توابع، به‌خصوص در بررسی رفتار تحلیلی، پیوستگی، همواربودن و مشتق‌پذیری مرتبه‌های بالاتر، از اهمیت خاصی برخورداراند. هدف اصلی این تحقیق، تحلیل نظری مشتقات توابع متعالی و تبیین جای‌گاه آن‌ها در چارچوب مفهومی ریاضیات عالی است. در این مطالعه، ابتداء تعاریف بنیادی توابع متعالی شامل توابع نمایی، لوگاریتمی، مثلثاتی و یک‌تعداد توابع خاص مورد بررسی قرار گرفته و سپس قواعد و ساختارهای مشتق‌گیری آن‌ها به‌صورت نظری تحلیل شده است. این تحقیق از نوع بنیادی و با روش تحلیلی–توصیفی است و اطلاعات تحقیق از طریق مطالعات کتابخانه‌ای و بررسی منابع معتبر علمی داخلی و خارجی جمع‌آوری شده‌اند. تمرکز اصلی تحقیق بر تحلیل روابط تحلیلی، قضایا، فرمول‌های مشتق‌گیری و رفتار مشتقات مرتبه‌های بالاتر توابع متعالی است. در این راستا، مفاهیمی از قبیل یک‌نوایی، تحدب، هم‌گرایی سری‌های توانی مرتبط با مشتقات و پیوند آن‌ها با ساختار انالیز ریاضی مورد توجه قرار گرفته است. یافته‌های تحقیق نشان می‌دهد که مشتقات توابع متعالی، افزون بر نقش بنیادی خود در انالیز ریاضی، ابزار مؤثری برای درک عمیق‌تر ساختار توابع پیوسته و تحلیلی فراهم می‌آورند. هم‌چنین، بررسی نظری مشتقات این توابع، زمینه‌ی مناسب برای توسعه مباحث پیشرفته‌تر در ریاضیات عالی، از جمله انالیز حقیقی و مختلط، فراهم می‌سازد. نوآوری اصلی این تحقیق در ارائه چارچوبی تحلیلی برای تبیین جای‌گاه مشتقات توابع متعالی نسبت به منابع پیشین است که می‌تواند به شفاف‌سازی سهم این مطالعه در ادبیات علمی کمک کند. افزون بر این، نتایج تحقیق نه تنها به‌عنوان چارچوبی نظری برای مطالعات آینده در حوزه انالیز ریاضی قابل استفاده است، بلکه در آموزش مفاهیم پیشرفته ریاضیات و کاربردهای علمی مرتبط با تحلیل رفتار توابع نیز می‌تواند نقش مؤثری ایفاء کند.

کلمات کلیدی: توابع متعالی، توابع مثلثاتی، لوگاریتمی، مشتقات، نمایی

An Analytical Review of the Theoretical Derivatives of Transcendental Functions in Advanced Mathematics

Abstract

Transcendental functions, as one of the fundamental components of mathematical analysis, play a crucial role in the development of advanced concepts in higher mathematics. The derivatives of these functions, especially in examining analytical behavior, continuity, smoothness, and higher-order differentiability, are significance. The main objective of this research is to analyze the theory of derivatives of transcendental functions and explain their position within the conceptual framework of advanced mathematics. The definitions of transcendental functions, including exponential, logarithmic, trigonometric, and functions, are first reviewed, and then the rules and structures of differentiation for these functions are analyzed theoretically. The research methodology is fundamental, with an analytical-descriptive approach, and the data are collected through library studies and an examination of scientific sources. The primary focus of the research is on analyzing the analytical relationships, theorems, differentiation formulas, and the behavior of higher-order derivatives of transcendental functions. In this context, concepts such as uniformity, convexity, convergence of power series related to derivatives, and their connection to the structure of mathematical analysis are emphasized. The findings indicate that the derivatives of transcendental functions, in addition to their fundamental role in mathematical analysis, provide a tool for a deeper understanding of the structure of continuous and analytic functions. Moreover, the theoretical analysis of these derivatives provides a suitable basis for the development of more advanced discussions in higher mathematics, including real and complex analysis. The main innovation of this study lies in presenting an analytical framework to explain the position of the derivatives of transcendental functions relative to previous sources, which can help clarify the contribution of this study to the scientific literature. Additionally, the results of the research can serve not only as a theoretical framework for future studies in mathematical analysis but also as a significant tool in teaching advanced mathematical concepts and applications related to the analysis of function behaviors.

Keywords: transcendental functions, exponential functions, logarithmic functions, trigonometric functions, derivatives

مقدمه

ریاضیات عالی به‌عنوان یکی از ارکان بنیادین علوم نظری، نقش کلیدی در توسعه دانش بشری ایفاء می‌کند و به‌خصوص انالیز ریاضی با مفاهیم اساسی هم‌چون لیمیت، مشتق و انتگرال، ابزارهای اصلی برای تحلیل رفتار توابع و ساختارهای ریاضی است. یکی از چالش‌های مهم در انالیز ریاضی، بررسی مشتقات توابع متعالی است. این توابع، به‌دلیل ماهیت غیر جبری خود، از پیچیدگی‌های تحلیلی بالایی برخورداراند و مطالعه دقیق آن‌ها مستلزم استفاده از روش‌های پیچیده ریاضی است. با وجود منابع متعدد در زمینه‌ی ریاضیات عالی که به قواعد مشتق‌گیری توابع متعالی پرداخته‌اند، این مباحث اغلب به‌صورت پراکنده و بدون ایجاد ارتباطات منسجم میان مفاهیم مختلف ارائه شده‌اند. این پراکندگی در منابع و فقدان یک تحلیل جامع و ساختاریافته از مشتقات توابع متعالی، نیازمند تحقیقاتی است که بتواند شکاف‌های موجود را پر کرده و رابطه دقیق‌تری میان مفاهیم مختلف آنالیز ریاضی برقرار کند. اهمیت این موضوع در کاربردهای انالیز ریاضی در رشته‌هایی هم‌چون فزیک و انجنیری نمایان می‌شود. به‌طور مثال، در مطالعه حرکت ذرات در فزیک، استفاده از مشتقات توابع متعالی می‌تواند رفتار ذرات را در شرایط خاص مدل‌سازی کرده و پیش‌بینی‌های دقیقی ارائه دهد. هم‌چنین، در انجنیری برق، تحلیل پاسخ سیستم‌های دینامیکی نیازمند درک عمیق از مشتقات توابع نمایی و مثلثاتی است، هدف اصلی این تحقیق، ارائه یک چارچوب نظری منسجم برای تحلیل مشتقات توابع متعالی است که علاوه بر تبیین ساختارهای نظری، زمینه را برای تحقیقات بیش‌تر در این حوزه فراهم آورد. این چارچوب می‌تواند به‌عنوان مبنای علمی برای درک عمیق‌تر روابط میان توابع و سری‌های توانی و هم‌چنین تحلیل‌های پیچیده‌تر در انالیز ریاضی به‌کار گرفته شود.

روش تحقیق

این تحقیق از نظر هدف، بنیادی و از نظر ماهیت، تحلیلی–توصیفی با رویکرد نظری است. به این معنی که این تحقیق بدون انجام آزمایش یا جمع‌آوری معلومات میدانی؛ به توصیف، تحلیل و تبیین مفاهیم نظری مرتبط با مشتقات توابع متعالی می

پردازد. جمع‌آوری اطلاعات به روش کتابخانه‌ای انجام شده است. در این راستا، اطلاعات مورد نیاز از طریق مطالعه و بررسی کتب معتبر ریاضیات عالی و مقالات علمی داخلی و خارجی منتشر شده در ژورنال‌ها و مجلات معتبر جمع‌آوری گردیده است. منابع مورد استفاده شامل کتاب‌های مرجع پوهنتون‌ها، مقالات تحقیقی و مقالات مروری چاپ‌شده در نشریات بین‌المللی معتبر و هم‌چنین مقالات علمی داخلی مرتبط با مشتقات توابع متعالی است.

مشتقات مراتب بالاتر

هرگاه تابع $f(x)$ در یک انتروال I تعریف شده و در یک نقطهٔ دلخواه $x \in I$ دارای مشتق اوّل باشد، آن‌گاه می‌توان مشتق اوّل آن، یعنی $f'(x)$ را خود به‌عنوان تابعی از متغیر x در همان انتروال در نظر گرفت. اگر این تابع نیز در نقطهٔ x مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن را مشتق دوم تابع f می‌نامند. مشتق دوم تابع f به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$f''(x) = d^2f(x)/dx^2$$

به‌طور کلی، اگر مشتق مرتبهٔ $(n-1)$ ام تابع f، یعنی $f^{(n-1)}(x)$، در نقطهٔ x مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه مشتق آن را مشتق مرتبهٔ n ام تابع می‌نامند و با نماد زیر نشان می‌دهند $f^{(n)}(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n}$، $n \in \mathbb{N}$

بنابراین، مشتقات مراتب بالاتر حاصل مشتق‌گیری‌های متوالی از یک تابع هستند و وجود مشتق مرتبهٔ n ام نیازمند وجود تمام مشتقات مراتب پایین‌تر تا مرتبهٔ $(n-1)$ می‌باشد. (Kreyszig, 2011)

بنابراین:

مشتق اول $\quad f'(x) = \frac{dy}{dx} = y'$

مشتق دوم $\quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = y''$

مشتق سوم $\quad f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = y'''$

$\vdots$

مشتق n ام $f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} y^n$

مثال: مشتق ششم تابع $y = x^5 - 2\,x^8 + 3\,x^{43} + x^7 - 4$ عبارت است از؟

حل: $y' = 5\,x^4 - 16\,x^7 + 12\,x^3 + 7\,x^6$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 20\,x^3 - 112\,x^6 + 36\,x^2 + 42\,x^5$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = 60\,x^2 - 672\,x^5 + 72\,x + 210\,x^4$$

$$y^{IV} = \frac{d^4y}{dx^4} = 120x - 3360x^4 + 72 + 840x^3$$

$$y^{V} = \frac{d^5y}{dx^5} = 120 - 13440\,x^3 + 2520\,x^2$$

$$y^{VI} = \frac{d^6y}{dx^6} = -40320\,x^2 + 5040\,x$$

جهت وضاحت بیش‌تر موضوع، تابع پولینومی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

مشتق تابع فوق طور ذیل حاصل می‌گردد:

مشتق n ام تابع داده شده عبارت است از:

$$f^{(n)}(x) = a_n . n!$$

مشتق $(n+1)$ ام تابع عبارت است از:

$$f^{(n+1)}(x) = 0$$

مشتق nام تابع نمایی $y = e^{mx}$ طور ذیل بدست می آوریم:

$$y' = e^{mx}.m = m^1.e^{mx}$$
$$y'' = e^{mx}.m^2 = m^2.e^{mx}$$
$$y''' = e^{mx}.m^3 = m^3.e^{mx}$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)} = e^{mx}.m^n = m^n.e^{mx}$$

مثال: مشتق دهم تابع $y = e^{2x}$ مساوی است به:

$$y^{(10)} = 2^{(10)}.e^{2x} = 1024e^{2x}$$

مشتق nام تابع نمائی $y = a^{mx}$ را با استفاده از روش لوگاریتمی.

$$y' = a^{mx}.ln\, a.m = m^1.ln\, a.a^{mx}$$
$$y'' = a^{mx}.ln\, a.m.ln\, a.m = m^2.ln^2\, a.a^{mx}$$
$$y''' = a^{mx}.ln\, a.m.m^2.ln^2\, a. = m^3.ln^3\, a.a^{mx}$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)} = m^n.(\ln a)^n.a^{mx}$$

مثال: مشتق هشتم تابع $y = 2^{2x}$ عبارت است از:

حل:

$$\mathrm{y^8 = 2^8.(\ln 2)^8.2^{2x} = 256ln^8 2.2^{2x}}$$

حالات خاص مشتقات مرتبه بالا

۱) در حالت خاص مشتق nام تابع $\mathrm{y = e^x}$ مساوی است به $y^{(n)} = e^x$ و مشتق nام تابع $y = a^x$ مساوی است به:

$$y^{(n)} = (\ln a)^n.a^x$$

۲) اگر λ یک عدد حقیقی باشد، پس مشتق nام تابع $y = \lambda u(x)$ مساوی است به:

$$y = \lambda u(x) \Longrightarrow y^{(n)} = \lambda u_{(x)}^{(n)}$$

۳) هم‌چنان، مشتق nام مجموع دو تابع u و v مساوی است به:

$$y = u + v \Longrightarrow y^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$$

مشتقات مراتب بالاتر توابع مثلثاتی

۱) مشتق nام تابع $\mathrm{y = \sin x}$ را قرار ذیل بدست می‌آید.

$$y' = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$$
$$y'' = -\sin x = \sin(\pi + x)$$
$$y''' = -\cos x = \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)} = \sin(\frac{n\pi}{2} + x)$$

مثال: مشتق دوازدهم تابع عبارت است از:

حل:

$$y^{12} = \sin\left(\frac{12\pi}{2} + x\right) = \sin(6\pi + x) = \sin x$$

۲) مشتق nام تابع $y = \cos x$ را قرار ذیل بدست می آوریم.

$$y' = -\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} + x)$$
$$y'' = -\cos x = \cos(\pi + x)$$
$$y''' = \sin x = cos(\frac{3\pi}{2} + x)$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)} = \cos(\frac{n\pi}{2} + x)$$

(یوسفی، ۱۳۹۵).

جدول مشتقات متعالی

تابع $f(x)$	مشتق اول $f'(x)$	مشتق دوم $f''(x)$	مشتق سوم $f^{(3)}(x)$	مشتق n-ام $f^{(n)}(x)$
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin(x + \frac{n\pi}{2})$
$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos(x + \frac{n\pi}{2})$
$\tan(x)$	sec^2x	$2sec^2xtan(x)$	پیچیده‌تر (الگو ترکیبی)	فرمول کلی با استفاده از سری یا بازگشتی
e^x	e^x	e^x	e^x	e^x
a^x	$e^x\ln(a)$	$a^x(\ln(a))^2$	$a^x(\ln(a))^3$	$a^x(\ln(a))^n$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{2}{x^3}$	$(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$
$\log_a x$	$\frac{1}{xlna}$	$-\frac{1}{x^2lna}$	$\frac{2}{x^3lna}$	$(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^nlna}$

حالات خاص مشتقات مراتب بالاتر توابع مثلثاتی

۱) مشتق nام تابع $y=\sin mx$ را می توانیم قرار ذیل بدست بیاوریم:

$$y=\sin mx \Rightarrow y^{(n)}=m^n.\sin(\frac{n\pi}{2}+mx)$$

۲) مشتق nام تابع $y=\cos mx$ را می توانیم قرار ذیل بدست بیاوریم:

$$y=cos\, mx \Rightarrow y^{(n)}=m^n.\cos(\frac{n\pi}{2}+mx)$$

مشتق مراتب بالاتر توابع لوگاریتمی

مشتق nام تابع $y=\ln x$ عبارت است از:

$$y'=\frac{1}{x}, y''=\frac{-1}{x^2}=\frac{(-1)^{2-1}.(2-1)!}{x^2}$$

$$y'''=\frac{1\,.\,2x}{x^4}=\frac{(-1)^{3-1}.(3-1)!}{x^3}$$

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}.(n-1)!}{x^n}$$

مثال: مشتق دوازدهم تابع $y=ln\,x$ را دریابید؟

حل:

$$\frac{d^{12}y}{dx^{12}}=\frac{(-1)^{12-1}.(12-1)!}{x^{12}}=\frac{-11.10.9.8.7.720}{x^{12}}=-\frac{39916800}{x^{12}}$$

مشتق nام تابع $y=\frac{Ax+B}{Cx+D}$ قرار ذیل بدست می آوریم:

$$y\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}(cx+d)^{-1}$$

از آن‌جای‌که:

$$y'=(-1)\frac{bc-ad}{c}.c(cx+d)^{-2}$$

$$y''=(-1)(-2)\frac{bc-ad}{c}.c^2(cx+d)^{-3}$$

$$y'''=(-1)(-2)(-3)\frac{bc-ad}{c}.c^3(cx+d)^{-4}$$

$$y^{(n)}=(-1)^n.n!\frac{bc-ad}{c}.c^n(cx+d)^{-(n+1)}$$

$$=(-1)^n.\frac{n!\,c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}.(bc-ad)$$

مثال: مشتق پنجم تابع $y = \frac{2x+1}{3x-5}$ عبارت است از:

$$y'''_{xxx} = \frac{\left(-\frac{b}{a^2 \sin^3 t}\right)'_t}{(a\cos t)'_t} = \frac{-\frac{b}{a^2}\cdot\frac{-3\sin^2 t\cdot\cos t}{\sin^6 t}}{-a\sin t} = -\frac{3b\cos t}{a^3\sin^5 t}$$

حل:

$$y^5 = (-1)^5\frac{5!.3^4}{(3x-5)^6}(3-(-10)) = \frac{-120.81.30}{(3x-5)^6} = -\frac{291600}{(3x-5)^6}$$

(Marsden, 2012)

فرمول لایب نیتز برای مشتق n ام

اگر توابع u و v مشتقات متوالی تا مرتبهٔ n ام را داشته باشند، برای محاسبهٔ مشتق n ام حاصل ضرب این دو تابع میتوان از رابطهٔ لایب نتز استفاده کرد(Bartle, 2011).

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}.v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}.v'' + \cdots + (uv)^{(n)}$$

مثال: مشتق nام تابع $y = \sin 5x\,.\cos 2x$ را بدست آورید؟

حل:

$$y = \sin 5x\,.\cos 2x = \frac{1}{2}[y = \sin 7x\,.\cos 3x]$$

بنابراین:

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}\left[7^n.\sin\left(7x+\frac{2\pi}{2}\right) + 3^n\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

مشتق مراتب بالاتر از توابع پارامتریک

مثال: مشتق سوم تابع $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ را بدست آورید؟

حل: داریم

$$y'_x = \frac{(b\sin t)'_t}{(a\cos t)'_t} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cot t$$

$$y''_{xx} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\cot t\right)'_t}{(a\cos t)'_t} = \frac{-\frac{b}{a}\cdot\frac{-1}{\sin^2 t}}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}$$

(کریمی و محمدی، ۱۴۰۰).

نتیجه‌گیری

این تحقیق به‌هدف تحلیل مشتقات توابع متعالی با روش کاملاً نظری و در چارچوب ریاضیات عالی مورد بررسی قرار گرفت. تمرکز اصلی مطالعه بر قواعد مشتق‌گیری، ساختار تحلیلی مشتقات و رفتار مشتقات مرتبه بالاتر توابع متعالی است. نتایج حاصل از تحلیل منابع معتبر علمی نشان داد، که مشتق‌گیری توابع متعالی، فراتر از یک جریان محاسباتی ساده، ابزاری بنیادی برای تحلیل رفتار ریاضی این توابع و درک ساختارهای پیچیده آن‌ها به‌شمار می‌رود. بررسی مشتقات توابع نمایی و لگاریتمی نشان داد که این دسته از توابع دارای الگوهای مشتق‌گیری منظم و قابل تعمیم هستند که امکان استخراج روابط تحلیلی دقیق را فراهم می‌سازد. هم‌چنین، تحلیل مشتقات توابع مثلثاتی و هایپرابولیک بیان‌گر وجود ساختارهای دوره‌ای و تقارنی در مشتقات آن‌هاست که در قالب روابط تحلیلی منسجم قابل مطالعه‌اند. مطالعه مشتقات مرتبه بالاتر این توابع نشان می‌دهد که تکرار فرآیند مشتق‌گیری منجر به الگوهای مشخص و قابل پیش‌بینی می‌شود که نقش مهمی در تحلیل ریاضی توابع متعالی ایفاء می‌کند. افزون بر این، بررسی نظری مشتقات توابع متعالی نشان داد که این مشتقات ارتباط نزدیکی با بسط‌های سری توانی و نمایش‌های تحلیلی توابع دارند و امکان تحلیل دقیق‌تر رفتار جبری و تحلیلی آن‌ها را فراهم می‌آورند. تحلیل ساختار مشتقات مرتبه بالا، ابزار مناسبی برای بررسی روابط بازگشتی و ویژگی‌های صوری توابع متعالی ارائه می‌دهد. در مجموع، نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که مشتقات توابع متعالی، یکی از عناصر کلیدی در توسعه مباحث انالیز ریاضی محسوب می‌شوند. تحلیل نظری این مشتقات می‌تواند به‌عنوان مبنایی علمی برای تحقیقات پیشرفته‌تر در بستر ریاضیات عالی مورد استفاده قرار گیرد و زمینه‌ساز گسترش مطالعات نظری در زمینه‌ی ساختار مشتق‌پذیری توابع متعالی باشد.

منابع

احمدی، عباس. (۱۳۹۷). **تحلیل ریاضی و مشتقات مرتبه بالا**. انتشارات: دانشگاه شهید بهشتی.

احمدی، عباس، حسینی، محمد. (۱۳۹۷). **تحلیل نظری مشتقات توابع متعالی در آنالیز ریاضی**. *فصلنامه ریاضیات محض*، ۹(۲)، ٤٥-٦٠.

حسینی، محمد. (۱۳۹۹). **مقدمه‌ای بر آنالیز ریاضی و توابع متعالی**. انتشارات: سمت تهران.

رضایی، سعید. (۱۳۹۸). **آنالیز ریاضی و مشتقات توابع متعالی**. انتشارات: پوهنتون تبریز.

کریمی، نیلوفر، محمدی، رضا. (۱۴۰۰). **ریاضیات عالی تحلیل مشتقات و توابع متعالی**. انتشارات: پوهنتون تهران.

یوسفی، روح الله. (۱۳۹۵). **آنالیز ریاضی و مشتقات توابع پیچیده**. انتشارات: پوهنتون صنعتی شریف.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to real analysis* (4th ed.). Wiley.

Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (2012). *Vector calculus* (6th ed.). W. H. Freeman.

Kreyszig, E. (2011). *Advanced engineering mathematics* (10th ed.). Wiley.

Rudin, W. (2014). *Principles of mathematical analysis* (3rd ed.). McGraw-Hill Education.

Stewart, J. (2016). *Calculus: Early transcendentals* (8th ed.). Cengage Learning.

Whittaker, E. T., & Watson, G. N. (2011). *A course of modern analysis* (4th ed.). Cambridge University Press.

Zill, D. G., & Wright, W. S. (2014). *Advanced engineering mathematics* (5th ed.). Jones & Bartlett Learning.