کاربرد توابع بتا در حل انتیگرال‌های غیر عادی معین

پوهنیار عبدالوارث صدیقی[1*]، پوهنمل جاوید هاشمی[2]، پوهنمل محمد حسین فراهی[3]

[1]رشته فزیک، [1،2]رشته ریاضی، پوهنتون فراه.

ایمیل: ab.sediqy812@gmail.com

چکیده

انتیگرال‌های غیر عادی، انتیگرال‌هایی می‌باشند که با توجه به‌روابطی که مربوط به حل انتیگرال می‌باشد قابل حل نبوده و نمی‌توان با استفاده از روش‌های عمومی و روش قسمی به‌حل این انتیگرال‌ها پرداخت. ریاضیدانان در قرن بیستم میلادی برای حل برخی از انتیگرال‌های بسیار پیچیده و غیر عادی از تابع بتا استفاده نمودند، بنابراین می‌توان با استفاده از تابع بتا($B(x,y)$)که توسط یک انتیگرال غیر عادی معین تعریف‌گردد بسیاری از این انتیگرال‌ها را حل نمود. توابع بتا به طور خاص در ریاضیات محض و فزیک به طور گسترده‌ای استفاده می‌شوند و در بسیاری از مسائل مربوط به انتیگرال‌ها، ریاضیات تحلیلی و حتی نظریه اعداد کاربرد فراوان دارند. همچنان برای حل انتیگرال‌های غیرعادی مکانیک آماری و الکترودینامیک در فزیک کاربرد فراوانی دارند. هدف این تحقیق این است که با استفاده از تابع بتا بتوان انتیگرال‌های غیرعادی پیچیده را به شکل ساده حل و به جواب برسیم. روش استفاده شده در این تحقیق کتابخانه‌ای و توصیفی-تحلیلی است. بنابراین در این مقاله سعی بر این شده است که با استفاده از این تابع، انتیگرال‌های غیرعادی راکه به آسانی نمی‌توان به حل آن پرداخت را با استفاده از تابع بتاکه خود نیز یک تعریف انتیگرالی دارد حل نمود.

کلمات کلیدی: انتیگرال، بتا، گاما، غیرعادی و متناهی.

مقدمه

ریاضیات شاخه‌ای از علوم معاصر می‌باشد که آن را هنر محاسله می‌نامند و به مطالعهٔ کمیت‌ها، ساختارها، فضاها و تغییرات علوم دیگر می‌پردازد. علم ریاضی ابزاری قدرتمند برای درک جهان هستی و پدیده‌های طبیعی است و به ما امکان این را فراهم می‌نماید تا مسائل مختلف و چالش‌های موجود را حل نماییم، انتیگرال یکی از بخش‌های مهم ریاضیات می‌باشد که می‌توان با آن محاسبات مغلق از قبیل مساحت، حجم و ... را بدست آورد. یکی از دو عمل اصلی معادلات تفاضلی انتیگرال‌گیری و همچنان معکوس آن مشتق گیری می‌باشد. یکی از بخش‌های انتیگرال گیری انتیگرال معین بوده که این انتیگرال مجموعه‌ای از توابع را نشان می‌دهد و این توابع برای اختصاص دادن اعداد به توابع است. یکی از توابع مهمی که در ریاضیات کاربردی و نظری نقش بسزائی دارد تابع بتا(انتیگرال اویلر نوع اول) است. این انتیگرال یک تابع خاص بوده که ارتباط نزدیکی با تابع گاما داشته و با یک انتیگرال معین در انتراول $[0,1]$ تعریف می‌گردد. ما با توجه به شکل ریاضی تابع بتا می‌توانیم انتیگرال‌هایی که دارای طاقت‌های نمایی و دارای چند جمله باشند را به تابع بتا تبدیل نموده و حل نماییم. در این مقاله سعی بر حل انتیگرال‌های غیر عادی‌ای که به آسانی نمی‌توان آن‌ها را حل نمود می‌پردازیم.

روش تحقیق

برای آن‌که کاربرد توابع بتا در حل انتگرال‌های غیرعادی معین به‌گونه‌ای روشن و کامل درک گردد، در جریان تحقیق کتاب‌های ریاضیات پیشرفته را که مباحث مربوط به انتگرال‌ها و معادلات تفاضلی را دربر داشتند، مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنان، مقالات علمی مرتبط با این موضوع نیز بررسی گردیده اساس این روند، نوع مطالعه کتابخانه‌ای توصیفی- تحلیلی بوده و در این تحقیق تلاش شد تا مطالب جمع‌آوری شده به شکلی ساده، عام‌فهم و قابل درک برای همهٔ علاقه‌مندان به این موضوع تنظیم و ارائه گردید.

انتیگرال

انتیگرال یک مفهوم اساسی در ریاضیات می‌باشد، به طور کلی به معنای محاسبهٔ مقدار یک تابع در یک انتروال مشخص است. این مفهوم به دو نوع اصلی تقسیم می‌شود:

۱) انتیگرال معین

انتیگرال معین به طور خاص برای محاسبه مساحت زیر منحنی توابع تعریف می‌شود و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_a^b f(x)dx$$

در اینجا:

- a و b حدود پایین و بالای انتبگرال هستند.
- f(x) تابعی است که می‌خواهیم انتیگرال آن را محاسبه کنیم.
- dx نشان‌دهندهٔ تغییرات در متغیر x است(استوارت،۱۹۱۴).

۲) انتیگرال غیر معین

انتیگرال نامعین محاسبهٔ تابعی که از آن می‌توان انتیگرال گرفت و حدود آن مشخص نباشد و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int f(x)\,dx$$

در اینجا:

- f(x) تابع اولیه است.
- dx نشان‌دهندهٔ تغییرات خیلی کوچک x است.

برای حل انتیگرال‌ها می‌توان از روش‌های مختلف استفاده نمود. با توجه به تابعی که در داخل انتیگرال وجود دارد می‌توان روش حل آن را تعیین نمود. بر این اساس انتیگرال را می‌توان نظر به محاسبهٔ آن به دو قسمت انتیگرال‌های عادی و غیر عادی تقسیم نمود. این انتیگرال‌ها را میتوان با استفاده از فرمول‌های عمومی و

روش‌های قسمی حل نمود. ما در ذیل به تعریف انتیگرال‌های غیر عادی می‌پردازیم(غوری، ۱۳۹۱).

انتیگرال‌های غیر عادی

انتگرال‌های غیرعادی (Improper Integrals) به انتیگرال‌هایی اطلاق می‌شود که در آن‌ها یکی از شرایط زیر برقرار است:

۱. **محدوده بی‌نهایت** :انتگرال‌هایی که دامنه یک یا هر دو حد آن به سمت بی‌نهایت می‌رود. به عنوان مثال انتیگرال‌های ذیل انتیگرال‌های غیر عادی می‌باشد:

$$\int_{-\infty}^{b} g(x)dx \text{ و } \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

۲. **تابع نامعین** :انتگرال‌هایی که تابع در یک یا چند نقطه از دامنه خود نامعین است. به عنوان مثال، انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ که در یک نقطه خاص (مانند $x = c$ در انتروال $[a, b]$ نامعین می‌باشد.

برای ارزیابی این انتگرال‌ها، از لیمیت استفاده می‌شود. اگر نتیجه انتگرال محدود باشد، به آن "متقارب" می‌گوییم و در غیر این صورت، "متباعد" نامیده می‌شود. بررسی متقارب یا متباعد این انتگرال‌ها در تحلیل ریاضی و کاربردهای علمی اهمیت زیادی دارد(آرفکن، ۱۳۹۷).

تابع بتا

تابع بتا، که به آن انتیگرال اویلری نوع اول نیز گفته می‌شود، یک تابع ویژه است که ارتباط نزدیکی با تابع گاما و ضرایب دوجمله‌ای دارد. این تابع توسط لئونارد اویلر و آدرین-ماری لژاندر مورد مطالعه قرار گرفت و نام آن توسط ژاک بینه انتخاب شد. تابع بتا معمولاً به صورت $B(x, y)$ نشان داده می‌شود، که در آن x و y اعداد حقیقی بزرگتر از ۰ هستند(فیروزکوهی،۱۳۹۲).

تعریف

تابع بتا به صورت انتگرال زیر تعریف می‌شود:

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

که در آن $x,y>0$ می‌باشد(آرفکن، ۱۳۹۷).

خواص تابع بتا

۱) حاصل‌ضرب دو فاکتوریل با بهره‌گیری از تعریف انتیگرال معین(انتیگرال اویلر) $\forall R(z)>-1$، $\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^z dt=z!$ به صورت حاصل‌ضرب دو انتیگرال می‌نویسیم. برای آن‌که امکان تغییر متغیر فراهم گردد، انتیگرال‌ها را روی انتروال متناهی در نظر می‌گیریم:

$$\forall R(m)>-1, R(n)>-1 => m!\,n!$$
$$=\lim_{a^2\to\infty}\int_0^{a^2} e^{-u}u^m du\int_0^{a^2} e^{-v}v^n dv$$

با تعویض $u=x^2$ و $v=y^2$ و تبدیل به مختصات قطبی به دست می‌آید:

$$B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2x-1}(cos\theta)^{2y-1}d\theta$$

دیدیم که می‌توان حاصل‌ضرب دو فکتوریل را به صورت تابع بتا تعریف و قیمت تقریبی آن را بدست آورد(Riddhi،۲۰۰۸).

۲) تابع بتا نسبت به متحول‌های x و y متناظر است:

$$B(x,y)=B(y,x)$$

با استفاده از تعویض $u=1-t$ در انتیگرال تابع بتا می‌توان به نتیجه متناظر بودن این تابع رسید:

$$\begin{cases} u=1-t => dt==du \\ t\to 0 \;\; u\to 1 \\ t\to 1 \;\; u\to 0 \end{cases}$$

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$
$$= \int_1^0 (1-u)^{x-1}u^{y-1}du$$
$$= \int_0^1 u^{y-1}(1-u)^{x-1}du = B(y,x)$$
$$=> B(x,y) = B(y,x)$$

در نهایت ثبوت گردید که تابع بتا نسبت به متحول‌های x و y متناظر است(Choi،۲۰۱٤)

۳) تابع بتا را می‌توان بر حسب تابع گاما $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ بیان کرد:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad x,y \neq 0$$

با استفاده از تعویض $t = u^2$ در تابع گاما داریم:

$$\begin{cases} t = u^2 => dt = \dfrac{du}{u} \\ t \to 0 \;\; u \to 0 \\ t \to \infty \;\; u \to \infty \\ u^2 + v^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \cdots = 2\int_0^\infty u^{2x-1}e^{-u^2}du$$
$$\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}dt = \cdots = 2\int_0^\infty v^{2y-1}e^{-v^2}dv$$
$$\Gamma(x).\Gamma(y) = 2\int_0^\infty u^{2x-1}e^{-u^2}du\, 2\int_0^\infty v^{2y-1}e^{-v^2}dv$$

با استفاده از خاصیت دوم تابع بتا و تبدیل مختصات دکارتی به قطبی داریم:

$$\Gamma(x).\Gamma(y)$$
$$= (2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\theta)^{2x-1}(sin\theta)^{2y-1}d\theta)(2\int_0^\infty r^{2(x+y)-1}e^{-r^2}dr)$$

$$=> \Gamma(x).\Gamma(y) = \Gamma(x+y).\mathrm{B}(x,y)$$

در نتیجه ارتباط تابع بتا و گاما ثبوت گردید(Verma،۲۰۱۸).

استفاده تابع بتا در حل انتیگرال‌های غیر عادی معین:

توابع بتا برای حل برخی از انتیگرال‌های غیر عادی معین در فزیک و ریاضیات کاربردهای فراوان دارند به‌خصوص هنگامی که این انتیگرال‌ها شامل توابع گاما، تابع‌های خاص و یا سلسله‌های خاص باشند. انتیگرال‌هایی که شامل طاقت‌هایی از متغیر و متمم آن در انتروال $(0,1)$ هستند بسیار موثر می‌باشد. ما با استفاده از قواعد ریاضیات می‌توان این انتیگرال‌ها را به شکل تابع بتا تبدیل نموده و بعدا حل نماییم(Atash،۲۰۱۸).

۱) برای حل انتیگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin\theta)^6 d\theta$ می‌توان به روش ذیل و با تبدیل نمودن آن به تابع بتا به جواب رسید:

داریم:

$$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{2x-1}(cos\theta)^{2y-1}d\theta$$

با توجه به توان $\sin\theta$ و $cos\theta$ در انتیگرال تابع بتا و جمله داخل انتیگرالی $(sin\theta)^6$ که می‌خواهیم جواب آن را بدست آوریم می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 2x-1=6 \;=> x=7/2 \\ 2y-1=0 \;=> y=1/2 \end{cases}$$

با توجه به معادلات بدست آمده و خاصیت سوم تابع بتا داریم:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \;=> B\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{7}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{7}{2}+\frac{1}{2})} = \frac{15}{72}\pi$$

در مثال بالا توانستیم با استفاده از خاصیت سوم تابع بتا جواب انتیگرال را بدست بیاوریم(Chandola،۲۰۲۰)

۲) برای حل انتیگرال $\int_0^1 t^2(1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt$ می‌توان به روش ذیل و با تبدیل نمودن آن به تابع بتا به جواب رسید:

با تعویض ذیل می‌توان جمله داخل انتیگرال را به تابع بتا تبدیل نمود و با توجه به خواص این تابع این انتیگرال را به آسانی حل می‌نماییم.

$$\begin{cases} u = t^2 \ => dt = du \\ t \longrightarrow 0 \ => u \longrightarrow 0 \\ t \longrightarrow 1 \ => u \longrightarrow 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 t^2(1-t^2)^{\frac{3}{2}}dt = \int_0^1 u(1-u)^{\frac{3}{2}}du = B(1,\frac{5}{2})$$

در ادامه با توجه به خواص تابع بتا می‌توان نوشت:

$$B\left(1,\frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma(1)\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(1+\frac{5}{2})} = \frac{6}{15}$$

در مثال بالا با استفاده از تابع بتا انتیگرال تابع نمایی که توسط روش‌های عمومی انتیگرال‌گیری سخت بود را به آسانی حل نمودیم(Dubey، ۱۹۷۰)

انتیگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^4\theta d\theta$ را بر حسب تابع بتا حل می‌کنیم:

برای حل این انتیگرال قیمت x و y را نظر به تابع بتا بدست می‌آوریم و بعداً حل می‌نماییم.

تابع بتا را از جنس توابع مثلثاتی داریم:

$$B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2x-1}(cos\theta)^{2y-1}d\theta$$

پس از مقایسهٔ انتیگرال مسئله و تابع بتا دو معادلهٔ ذیل بدست می‌آید:

$$2x-1=0$$
$$2y-1=4$$

نظر به روابط قیمت x و y بدست می‌آید:

$$x = 1/2$$

$$y = 5/2$$

با استفاده از خاصیت سوم تابع بتا می‌توان جواب انتیگرال را بدست آورد.

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} => B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2}+\frac{1}{2})} = \frac{8}{35}\pi$$

جواب انتیگرال را با استفاده از تابع بتا و خواص آن به راحتی بدست آوردیم(Rahman، ۲۰۲۰).

نتیجه گیری

توابع بتا ، با توجه به ویژگی‌های خاص و ارتباطات عمیقش با تابع گاما یکی از پرکاربردترین تعریف توابع برای حل انتیگرال‌های غیر عادی معین(اویلر) می‌باشند از این توابع در حل انتیگرال‌های غیر معمولی که دارای نقاط نامعین یا دامنه‌های بی نهایت چالش برانگیز هستند و اکثرا در مسائل علم فزیک و ریاضی با آن روبرو می‌شویم استفاده می‌شود. این تابع به سادگی می‌تواند به انتیگرال‌های پیچیده تبدیل شود و محاسبه این انتیگرال‌ها را تسهیل کند. این ویژگی به‌خصوص در انتیگرال‌هایی که شامل ترکیبات توان، مقادیر نامعین و یا شامل ترکیباتی از توابع مثلثاتی هستند مفید است. برای حل این انتیگرال‌ها میتوان با استفاده از تعویض مناسب(تعویض باید طوری باشد که بتوان آن را با شکل اصلی تابع بتا مقایسه نمود) و تبدیل نمودن آن به تابع بتا کار را کمی آسان نموده و بعدا با استفاده از خواص این تابع می‌توان جواب مناسب را بدست آورد. اغلب انتیگرال‌هایی که در آن‌ها جملاتی از توابع مثلثاتی وجود دارد را با استفاده از خاصیت دوم این تابع می‌توان حل نمود و توابعی که توان آن‌ها شامل متحول باشد را می‌توان با تعویض مناسب به تابع بتا تبدیل نمود و از خاصیت سوم این تابع که ارتباط بین تابع گاما و بتا می‌باشد جواب را بدست آورد. در نهایت توانایی تابع بتا در تبدیل و ساده سازی انتیگرال‌های غیر عادی معین، آن را به عنوان یک ابزار کلیدی در تحلیل ریاضی تبدیل کرده است. پژوهش‌ها و کاربردهای بیشتر در این زمینه می‌تواند به انکشاف روش‌های نوین و کارآمدتر در حل معادلات پیچیده ریاضی کمک کند.

منابع

آرفکن، جورج بی، وبر، هانس جی:(۱۳۹۷). **روش‌های ریاضی در فزیک**. جلد اول، چاپ پنجم، تهران: انتشارات نشر دانشگاهی.

استوارت، جیمز.(1914). **حسابگان دیفرانسیل و انتیگرال** .جلد اول، چاپ اول، اصفهان :انتشارات دانشگاه اصفهان.

فیرورکوهی، خالقداد.(۱۳۹۲). متودهای ریاضی در فزیک. چاپ دوم، کابل: انتشارات سعید

غوری، محمد انور(۱۳۹۱). **ریاضیات عالی** .جلد اول، چاپ پنجم، کابل :انتشارات سعید.

Riddhi, D. (2008). Beta function and its applications. *The University of Tennesse, Knoxville, USA.[online] Available from: http://sces. phys. utk. edu/moreo/mm08/Riddi. pdf*.

Choi, J., Rathie, A. K., & Parmar, R. K. (2014). Extension of extended beta, hypergeometric and confluent hypergeometric functions. *Honam Math. J*, *36*(2), 357-385.

Rahman, G., Mubeen, S., & Nisar, K. S. (2020). A new generalization of extended beta and hypergeometric functions. *Journal of Fractional Calculus and Applications*, *11*(2), 32-44.

Atash, A. A., Barahmah, S. S., & Kulib, M. A. (2018). On a new extensions of extended Gamma and Beta functions. *Int. J. Stat. Appl. Math*, *3*(6), 14-18.

Chandola, A., Mishra Pandey, R., Agarwal, R., & Dutt Purohit, S. (2020). An extension of beta function, its statistical distribution, and associated fractional operator. *Advances in Difference Equations*, *2020*(1), 684.

Verma, D. (2018). Relation between Beta and Gamma function by using Laplace Transformation. *Researcher*, *10*, 72-74.

Dubey, S. D. (1970). Compound gamma, beta and F distributions. *Metrika*, *16*(1), 27-31.

Application of Beta Functions in Solving Improper Definite Integrals

Abdul Waris Siddiqi*[1], Jawid Hashemi[2], Mohammad Hussain Farahi[3]
[1]Department of Physics, [12]Department of Mathematics,
Education Facutly, Farah University

Email: ab.sediqy812@gmail.com

Abstract

Improper integrals are those which, according to the general rules of integration, cannot be solved directly using standard or partial integration methods. In the twentieth century, mathematicians used the Beta function to solve certain highly complex and improper integrals. Therefore, by applying the Beta function B(x, y)—which itself is defined by an improper definite integral—many of these integrals can be evaluated. Beta functions are widely used in pure mathematics and physics, particularly in problems involving integrals, analytical mathematics, and even number theory. They are also frequently applied in solving improper integrals that arise in statistical mechanics and electrodynamics in physics. The aim of this study is to demonstrate how the Beta function can simplify and solve complex improper integrals. The research method employed in this study is library-based and descriptive–analytical. Hence, this paper attempts to solve improper integrals—those which cannot be easily evaluated—by means of the Beta function, which itself possesses an integral definition.

Keywords: Integral, Beta, Gamma, Improper, Finite.