حل معادله لژاندر و تحلیل کاربردهای آن در فزیک

عبدالرازق رحمانی
دیپارتمنت ریاضی، پوهنځی تعلیم و تربیه، پوهنتون فراه
ایمیل: raziqrahmani23@yahoo.com

چکیده

در این تحقیق به‌بررسی معادله تفاضلی لژاندر پرداخته شده است که از جمله معادلات با ضرایب متغیر در ریاضیات کاربردی محسوب می‌شوند. این معادلات به‌دلیل کاربردهای گسترده در فزیک و ریاضیات از اهمیت خاصی برخوردار هستند. جواب این معادلات در حالت کلی نمی تواند به‌صورت توابع مقدماتی بیان شود، اما می‌توان برای آن‌ها جواب‌هایی به شکل سلسله متقارب به دست آورد. این تحقیق نشان می‌دهد که بسیاری از معادلات تفاضلی مهم در ریاضیات کاربردی، شامل توابعی هستند که به‌جای توابع مقدماتی، به‌وسیلهٔ توابع خاص توصیف می‌شوند. روش تحقیق مورد استفاده، ماهیت کتابخانه‌ای داشته و تحلیل‌های انجام‌شده حاکی از آن است که معادلات لژاندر نقشی کلیدی در ارائهٔ راه‌حل‌هایی برای معادلات تفاضلی مختلف ایفاء می-کنند .همچنین، چندجمله‌ای‌های لژاندر و ویژگی‌های منحصربه‌فرد آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. این چندجمله‌ای‌ها به‌دلیل خواص قابل‌توجه خود، در کاربردهای متعدد فزیک، نظیر تحلیل ارتعاشات و پدیده‌های موجی، حائز اهمیت هستند. نتایج این تحقیق نشان‌دهندهٔ جایگاه حیاتی توابع خاص و معادلات لژاندر در پیشبرد دانش فزیک نظری و ریاضیات پیشرفته است که درک عمیق آن‌ها می‌تواند به‌توسعهٔ مفاهیم کاربردی جدید در این حوزه‌ها منجر شود.

کلمات کلیدی: فزیک، کاربردها، معادله لژاندر.

مقدمه

ریاضیات علم است با قوانین و اصول منطقی خود، راه را برای بر خورد انسان با واقعیت‌های که مافوق قدرت او است هموار می‌کند. معادلات تفاضلی شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی است که بسیار از قوانین عمومی طبیعت (در فزیک، کیمیا، بیولوژی و نجوم) طبیعی‌ترین بیان خود را در زبان معادلات تفاضلی می-یابند(سیمونز، ۱۳۷۲: ۱). زبان، به‌عنوان وسیله‌ای برای افهام و تفهیم، نقش مهمی در انتقال خصوصیات، عادات و فرهنگ جوامع ایفاء می‌کند. از میان تمامی زبان‌ها، ریاضیات به‌عنوان قدیمی‌ترین زبان شناخته می‌شود که گالیله آن را "زبان طبیعت" نامیده است. ریاضیات، هسته اصلی ساختار علوم بشری به شمار می‌رود و زندگی انسان‌ها از آغاز پیدایش تا به‌امروز با این زبان درهم‌آمیخته است. پیشرفت های شگرف در تکنولوژی مدرن و تمامی اکتشافات و اختراعات، مدیون این علم بنیادین است.

یکی از شاخه‌های پیشرفته ریاضیات، معادلات تفاضلی است که ابزاری قدرتمند برای تبیین قوانین طبیعت و حل مسائل مختلف در علوم کاربردی نظیر مهندسی، فزیک، اقتصاد، کیمیا و دیگر رشته‌های علمی به‌شمار می‌رود (دستمالچی ساعی و همکاران، ۱۳۸۲). تحقیقی در این زمینه، یکی از وظایف علاقه‌مندان به ریاضیات است و اهمیت ویژه‌ای در توسعه علمی دارد. در همین راستا، موضوع تحقیق حاضر با عنوان "حل معادله لژاندر و بررسی کاربردهای آن در فزیک" انتخاب شده است. این تحقیق با بهره‌گیری از منابع معتبر علمی در حل معادله لژاندر و کاربردهای آن در فزیک مورد بررسی قرار گرفته است. امید است این تحقیق، به یاری خداوند متعال، برای خوانندگان محترم مفید واقع شود.

روش تحقیق

این تحقیق از نوع کتابخانه‌ای بوده و مطالب با استفاده از کتب معتبر علمی و مقالات تحقیقی از پایگاه‌های معتبر علمی همچون، ResearchGate, Google Scholar, Springer و Elsevier جمع‌آوری شده است. برای اطمینان از دقت و اعتبار، از منابع به‌روز و مرتبط استفاده شده است. کلمات کلیدی که در این تحقیق برای جستجوی منابع علمی به‌کار رفته‌اند عبارت‌اند از: معادله،

لژاندر و کاربردها، مطالب جمع آوری شده پس از تجزیه و تحلیل و تطبیق با اهداف تحقیق نوشته شده است.

یافته‌های تحقیق

معادله تفاضلی لژاندر

شکل عمومی این معادله به‌صورت زیر می‌باشد.

$$(1-x^2)y''-2\,xy'+p(p+1)y=0 \qquad (1)$$

که در آن p مقدار ثابت حقیقی است.

می‌دانیم نقطه $x_0=0$ یک نقطه عادی این معادله می‌باشد زیرا توابع $p(x)=\frac{-2\,x}{1-x^2}$ و $q(x)=\frac{p(p+1)}{1-x^2}$ در این نقطه تحلیلی هستند. (مقدار تابع و مشتقات متوالی آن‌ها در این نقطه موجود می‌باشد).

از این رو حل معادله را حول این نقطه به‌صورت سلسله $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ در نظر می‌گیریم. بنابراین با قرار دادن y، y' و y'' در معادله می‌توان ضرایب a_n ها را به‌صورت زیر بدست آورد.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad ، \quad y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} \quad ، \quad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

و با جاگذاری در رابطه (1) خواهیم داشت که.

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+p(p+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

و یا

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + p(p+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

اکنون با یکسان کردن توان‌های x بر حسب n خواهیم داشت.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} p(p+1)a_n x^n = 0$$

و رابطه بازگشتی زیر نتیجه می‌شود.

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2\,na_n + p(p+1)a_n = 0 \text{ ، } n = 0،1،2، \dots$$

و یا

$$a_{n+2} = -\frac{(p-n)(p+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n \quad \text{، } n = 0، 1، 2، \dots \qquad (2)$$

در این صورت خواهیم داشت.

$$a_2 = -\frac{p(p+1)}{1\cdot 2}a_0$$

$$a_3 = -\frac{(p-1)(p+2)}{2\cdot 3}a_1$$

$$a_4 = -\frac{(p-2)(p+3)}{3\cdot 4}a_2 = \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}a_0$$

$$a_5 = -\frac{(p-3)(p+4)}{4\cdot 5}a_3$$
$$= \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}a_1$$

و الی آخر. با قرار دادن این ضرایب در حل مفروض خواهیم داشت:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

$$y = (a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots) + (a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots)$$

$$y = a_0[1 - \frac{p(p+1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-2)(p+1)(p+3)}{4!}x^4 - -\frac{p(p-2)(p-4)(p+1)(p+3)(p+5)}{6!}x^6 + \cdots]$$
$$+a_1[x - \frac{(p-1)(p+2)}{3!}x^3 + \frac{(p-1)(p-3)(p+2)(p+4)}{5!}x^5 - \cdots]$$

$$= a_0\sum_{n=0}^{\infty} a_{2\,n}x^{2\,n} + a_1\sum_{n=0}^{\infty} a_{2\,n+1}x^{2\,n+1}$$

اکنون برای تعیین شعاع تقارب هر یک از سلسله‌های وابسته به a_0 و a_1 به صورت زیر عمل می‌کنیم (رحمانی‌دوست، ۱۳۸۲).

$$\lim_{n\to\infty}\left|a_{2\,n+2} + \frac{x^{2\,n+2}}{a_{2\,n}x^{2\,n}}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{\frac{(p-2\,n)(p+2\,n+1)}{(2\,n+1)(2\,n+2)}x^{2n+2}}{x^{2\,n}}\right|$$
$$= |x|^2 \quad \Rightarrow \quad |x| < 1$$

پس $|x| < 1$ انتروال تقارب سلسله با توان‌های جفت n می‌باشد متشابهاً می‌توان این فاصله را برای توان‌های طاق n نیز بدست آورد. از طرفی مشاهده می-شود که شود که y_1 و y_2 دو حل مستقل خطی می‌باشد. زیرا این حل‌ها یکی بر حسب توان‌های جفت و دیگری بر حسب توان‌های طاق می‌باشد.

تذکر: حل‌های حاصل از معادله تفاضلی لژاندر را توابع لژاندر نامیده و در حالت کلی این توابع مقدماتی نیستند (عرفانیان، اورعی، 1385: 187-185).

چند جمله‌ای‌های لژاندر

اگر در معادله لژاندر (1) p یک عدد صحیح و نامنفی مانندی $p = m$ باشد آنگاه بنا به‌رابطه بازگشتی (2) با قرار دادن $p = m$ خواهیم داشت (حسن‌پور، ۱۳۸۹).

$$a_{n+2} = -\frac{(m-n)(m+n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n \quad ، \quad n = 0،1،2، \dots \qquad (3)$$

به‌طوری که ملاحظه می‌شود چنانچه $n = m$ باشد آنگاه $a_{m+2} = 0$ خواهد بود. از این‌رو نتیجه می‌شود:

$$a_{m+4} = a_{m+6} = a_{m+8} = \cdots = 0$$

بنابراین برای عدد m یک چند جمله‌ای از درجه m به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

اگر $m = 2\,k$ عدد جفت باشد آنگاه چند جمله‌ای از درجه m نسبت به توان‌های جفت x بدست می‌آید.

$$y_1 = 1 - \frac{m(m+1)}{2!}\,x^2 + \frac{m(m-2)(m+1)(m\ +3)}{4!}x^4 + \cdots$$

$$+\frac{(-1)^k\big(m-(m-2)\big)\dots(m-2)m(m+1)(m+3)-(m+(m-1))}{m!}\;x^m$$

اگر $m = 2\,k + 1$ عددی فرد باشد آنگاه چند جمله‌ای از درجه m نسبت به توان‌های فرد x بدست می‌آید.

$$y_2 = x - \frac{(m-1)(m+2)}{3!}x^3 + \frac{(m-3)(m-1)(m+2)(m+4)}{5!}x^5 - \cdots$$

$$+(-1)^k\big(m-(m-2)\big)\ldots(m-1)(m+2)\ldots\frac{(m+(m-1))}{m!}x^m$$

با توجه به‌رابطه بازگشتی (3) می‌توان ضریب a_n را بر حسب a_{n+2} به صورت زیر بدست آورد.

$$a_n = -\frac{(n+1)(n+2)}{(m-n)(m+n+1)}a_{n+2} \qquad (4)$$

با قرار دادن $n = m-2$ خواهیم داشت.

$$a_{m-2} = \frac{m(m-2)}{2(2\,m-1)}a_m$$

اکنون با انتخاب $a_m = \frac{(2\,m)!}{2^m(m!)^2}$ داریم.

$$a_{m-2} = -\frac{m(m-1)}{2(2\,m-1)}a_m \cdot \frac{(2\,m)!}{2^m(m!)^2} = \frac{(2\,m-2)!}{2^m(m-1)!\,(m-2)!}$$

و با قرار دادن $n = m-4$ در رابطه بازگشتی فوق دیده می‌شودکه:

$$a_{m-4} = -\frac{(m-2)(m-3)}{4(2\,m-3)}a_{m-2} = \frac{(2\,m-4)!}{2^m \cdot 2!\,(m-2)!\,(m-4)!}$$

و در حالت کلی $n = m-2\,k$ در رابطه بازگشتی (3) خواهیم داشت:

$$a_{m-2k} = \frac{(-1)^k(2\,m-2\,k)!}{2^m k!\,(m-k)!\,(m-2\,k)!}$$

چنانچه چند جمله‌ای‌های لژاندر را با $p_m(x)$ نمایش دهیم در حالت کلی نتیجه می‌شود که:

$$p_m(x) = \frac{\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \, (2\,m - 2\,k)!}{2^m k!\,(m-k)!\,(m-2\,k)!} x^{m-2\,k}$$

که $N = \frac{m}{2}$ برای اعداد جفت و $N = \frac{m-1}{2}$ برای اعداد طاق که هر کدام صحیح باشند در این صورت $p_m(x)$ را چند جمله‌ای لژاندر از مرتبه m می‌نامیم.

$$p_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = x$$

$$p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3\,x)$$

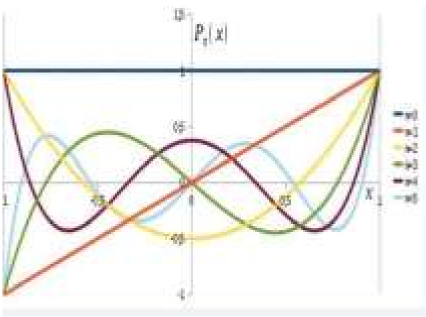
$$p_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$p_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15\,x)$$

با استفاده از فورمول می‌توانیم متباقی چند جمله‌ای لژاندر را بدست آوریم (عرفانیان، اورعی، 1385: 18).

گراف چند جمله‌ای‌های لژاندر

با توجه با مثال‌های داده شده فوق مطابق رسم توابع چند جمله‌ای می‌توان نمایش هندسی هر یک از آن‌ها را به‌صورت زیر نشان داد. (شکل 1).



(شکل 1) گراف چند جمله‌ای‌های لژاندر (عرفانیان، اورعی، 1385: 189).

تبصره: کلیه جملات لژاندر « چند جمله‌ای لژاندر » را می‌توان به کمک دستور زیر نوشت که به‌فورمول "ردریگز" معروف است.

$$p_n = \frac{\frac{1}{2^n \cdot n!} dn(x^2-1)^n}{dx^n} \qquad (5)$$

قبل از اثبات رابطه (5) به عنوان مثال $p_1(x)$ ، $p_2(x)$ ، $p_3(x)$ ... را می‌نویسیم و آن را با $p_n(x)$ هایی که از قبل محاسبه می‌کردیم، مقایسه می‌کنیم.

$$n = 1 \ : \quad p_1(x) = \frac{1}{2(1!)} . (2\,x) = x$$

$$n = 2 \ : \quad p_2(x) = \frac{1}{4(2!)}((x^2-1)^2)'' = \frac{1}{8}\big(4\,x(x^2-1)\big)'$$

$$= \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$n = 3 \ : \quad p_3(x) = \frac{1}{2^3(3!)}((x^2-1)^3)''' = \frac{1}{2}(5x^3-3\,x)$$

$$n = 6 \ : \quad p_6(x) = \frac{1}{2^6(6!)} \frac{d^6(x^2-1)^6}{dx^6}$$

$$= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$$

ثبوت فورمول رو دریگز، می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n\,n!} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

برای این کار فرض می‌کنیم $y = (x^2-1)^n$ در این صورت:

$$\frac{dy}{dx} = 2\,xn(x^2-1)^{n-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2\,nxy}{(x^2-1)}$$

$$\Longrightarrow \ (x^2-1)\frac{dy}{dx} = 2\,nxy \qquad (6)$$

از رابطه (6) طبق دستور لایب نیتس $m+1$ بار مشتق می‌گیریم.

دستور لایب نیتس

$$(1-x^2)y'' + axy' + by = 0$$

مشتق مرتبه n-ام معادله بالا :

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - x(2\,n-a)y^{(n+1)} + (na+b + n(n-1))y^{(n)} = 0$$

$$(x^2-1)\frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}} + (n+1)\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} \cdot 2n + \frac{n(n+1)}{2!}\frac{d^m y}{dx^m} \cdot 2 = 0$$

به بیان ساده تر:

$$2n(x\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} + (n+1)\frac{d^m y}{dx^m}) + (x^2-1)\frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}} + 2x\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} - n(n+1)\frac{d^m y}{dx^m} = 0$$

دراین رابطه فرض می‌کنیم $z = \frac{d^m y}{dx^m}$ و دراین صورت خواهیم داشت.

$$(1-x^2)\frac{d^2 z}{dz^2} - 2\,x\frac{dz}{dx} + n(n+1)z = 0 \qquad (7)$$

که رابطه (7) خودش یک معادله تفاضلی لژاندر می‌باشد و حل آن:

$$z = c\,p_n(x)$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = c\,p_n(x) \;\; \Longrightarrow \;\; x = 1 \quad ، \quad p_0(x) = 1 \;\; \Longrightarrow \;\; c = \frac{d^n y}{dx^n}|_{x=1}$$

$$y = (x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n \qquad (8)$$

طبق دستور لایب نیتس از رابطه (8) n بار مشتق گرفته و با قرار دادن $x = 1$ بعد از مشتق گیری نتیجه می‌شود.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (1+1)^n \cdot n! = 2^n \cdot n!$$

بنا براین از معادله (6) نتیجه می‌شود $p_n(x) = \frac{1}{e}\frac{d^n y}{dx^n} \implies p_n(x) =$ $\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \cdot \frac{1}{2^n .n!}$ (حسن پور، 1389: 165).

خواص چند جمله‌ای‌های لژاندر

اگر $p_n(x)$ و $p_m(x)$ چند جمله‌ای لژاندر باشند، ثابت می‌کنیم:

$$\int_{-1}^{1} p_m(x) \cdot p_n(x) dx = 0 \quad \text{if} \qquad m \neq n$$

$$\int_{-1}^{1} \left(p_n(x)\right)^2 dx = \frac{2}{2\,n+1} \quad \text{if} \qquad m = n$$

اثبات 1: معادله تفاضلی لژاندر:

$$(1-x^2)y'' - 2\,xy' + n(n+1)y = 0$$

شکل دیگر معادله لژاندر

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\cdot\frac{dy}{dx}\right) + n(n+1)y = 0 \qquad (9)$$

چون $p_n(x)$ و $p_m(x)$ یک حل معادله می‌باشد، پس در رابطه (9) صدق می-کند.

$$\left((1-x^2)\cdot\frac{dp_n\left(x\frac{d}{dx}\right)}{dx}\right) + n(n+1)p_n(x) = 0 \qquad (10)$$

یا

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\cdot\frac{dp_m(x)}{dx}\right) + m(m+1)p_m(x) = 0 \qquad (11)$$

اگر رابطه‌های (10) و (11) طبق حل سیستم به‌روش حذف تحویلی، رابطه (10) در $p_m(x)$ و رابطه (11) را در $p_n(x)$ ضرب می‌کنیم و از هم کم می‌کنیم.

$$p_m(x)\cdot\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dp_n(x)}{dx}\right) - p_n(x)\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{dp_m(x)}{dx} + (n(n+1) - m(m+1))$$

$$p_n(x)\cdot p_m(x) = 0$$

حالا از هر جملات در انتروال $[-1،1]$ انتگرال می‌گیریم.

$$\int_{-1}^{1} p_m(x)\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dp_n(x)}{dx}\right)dx + \int_{-1}^{1} p_n(x)\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dp_m(x)}{dx}\right)dx + (n(n+1) - m(m+1))\int_{-1}^{1} p_m(x)p_n(x)dx = 0$$

از آن جا که دو تا انتگرال اول مساوی صفر می‌باشند (به کمک دستور جزء به جزء انتگرال می‌گیریم).

در نتیجه:

$$\left(n(n+1) - m(m+1)\right)\int_{-1}^{1} p_m(x)\cdot p_n(x)dx = 0$$

بنابراین:

$$\int_{-1}^{1} p_m(x)\cdot P_n(x)dx = 0$$

فرمول‌های بازگشت لژاندر

با فرض $p_n(x) = p_n$ به آسانی می توان نشان داد که:

$$(2\,n+1)x\,p_n = (n+1)p_{n+1} + n\,p_{n-1}$$

$$np_n = xp_n' - p_{n-1}'$$

$$(2\,n+1)p_n = p_{n+1}' - p_{n-1}'$$

$$(n+1)p_n = p_{n+1}' - x\,p_n'$$

$$(1-x^2)p_n' = n(x\,p_{n-1} - x\,p_n)$$

$$(1-x^2)p_n' = (n+1)(x\,p_n - p_{n+1})$$

طوری ذیل هرکدام را ثبوت می‌کنیم.

ثبوت ۱: برای ثبوت آن از این رابطه کار می‌گیریم

$$(1-2\,xh+h^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n\,p_n(x)$$

از طرفین معادله بالا نسبت به h مشتق می‌گیریم، نتیجه می‌شود:

$$-\frac{1}{2}(1-2\,hx+h^2)^{-\frac{3}{2}}.(-2\,x+2\,h) = \sum_{n=0}^{\infty} n\,h^{n-1}p_n(x)$$

یا

:

$$(x-h)((1-2\,xh+h^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-2\,xh+h^2).\sum_{n=0}^{\infty} n\,h^{n-1}p_n(x)$$

$$(x-h)\sum_{n=0}^{\infty} h^n\,p_n(x) = (1-2\,xh+h^2)\sum_{n}^{\infty} n\,h^{n-1}p_n(x)$$

$$(x-h)[p_0(x)+hp_1(x)+..+h^{n-1}p_{n-1}(x) + h^np_n(x)+..]$$

$$= (1 - 2\,xh + h^2)\,[p_1(x) + 2\,hp_2(x) + . + (n-1)h^{n-2}p_{n-1}(x) + nh^{n-1}p_n(x) + (n+1)h^n p_{n+1}(x) + \cdots]$$

ضرایب h^n از طرفین معادله آخری را مساوی هم قرار می‌دهیم نتیجه می‌شود.

$$xp_n(x) - p_{n-1}(x) = (n+1)p_{n+1}(x) - 2\,xnp_n(x) + (n-1)p_{n-1}(x)$$

به‌طوری خلاصه:

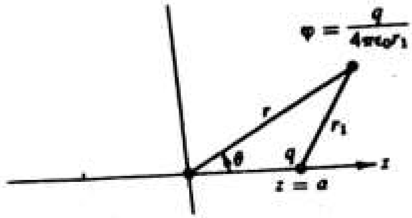
$$(2\,n+1)x\,p_n(x) = (n+1)p_{n+1}(x) + n\,p_{n-1}(x)$$

کاربردهای معادله لژاندر در فزیک

چند جمله‌ای‌های لژاندر در مباحث فزیکی و ریاضی بسیار متفاوتی ظاهر می‌شوند: مبدا این چند جمله‌ای‌ها ممکن است به‌صورت حل‌های معادله تفاضلی لژاندر باشد این چند جمله‌ای‌ها احتمال دارد به‌صورت پیامدی از یک فرمول ردریگز وارد شوند. ممکن است پیامد یک جستجوی یک مجموعه کامل از توابع متعامد روی انتروال $[-1,1]$ باشند. این چند جمله‌ای‌ها در واقع هماهنگ‌های کروی، نمایانگر ویژه تابع‌های تکانه‌ای زاویه‌ای اند. این چند جمله‌ای‌ها را می‌توان به کمک یک تابع مولد نیز پدید آورد. در اینجا چند جمله‌ای‌های لژاندر را از طریق تابع مولد معرفی می‌کنیم.

مبنای فزیکی ـ الکتروستاتیک

در این بخش چند جمله‌ای‌های لژاندر را به کمک یک تابع مولد معرفی می-کنیم. بار الکتریکی q را که در $z = a$ روی محور z واقع است در نظر بگیرید. بناً به‌شکل زیر پتانسیل الکتروستاتیکی بار q برابر است با:



شکل (2) پتانسیل الکتروستاتیکی، بار q نسبت به‌مبدأً جابجا شده است.

$$\varphi = \frac{1}{4\,\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r_1} \qquad (\text{دستگاه } SI) \qquad (12)$$

مسئله ما عبارت است از تعیین پتانسیل الکتروستاتیکی بر حسب مختصات قطبی کروی r و θ (مختصات φ به‌دلیل تقارن حول محور z ظاهر نخواهد شد). با استفاده از قانون کوساین

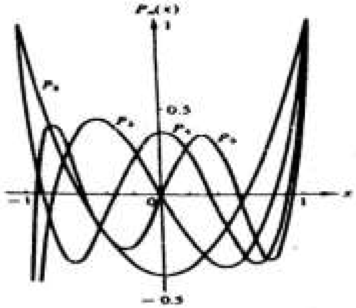
$$\varphi = \frac{q}{4\,\pi\varepsilon_0}\left(r^2 + \alpha^2 - 2\,\alpha r cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (13)$$

چند جمله‌ای های لژاندر

حالت $r > \alpha$، یا به بیان دقیق‌تر $r^2 > |\alpha^2 - 2\,\alpha r cos\theta|$ ، را در نظر بگیرید. جذر را می‌توان به کمک سلسله دو جمله‌ای بسط داد و به رابطه زیر رسید:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{n=0}^{\infty} p_n(cos\theta)\left(\frac{\alpha}{r}\right)^n \qquad (14)$$

این عبارت یک سری از توان‌های $\left(\frac{\alpha}{r}\right)$ به‌شمار می‌آید که در آن ضریب توان n-ام با $p_n(\cos\theta)$ نشان داده شده است. p_n ها چند جمله‌ای‌های لژاندر هستند. شکل (3) و می‌توان آن ها را به کمک تابع زیر تعریف کرد.



شکل(3) چند جمله‌ای‌های لژاندر $p_2(x)$ ، $p_3(x)$ ، $p_4(x)$ ، $p_5(x)$

$$g\left(t،x\right)=(1-2\,xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x)t^n \quad ، \quad |t|<1 \qquad (14)$$

این عبارت معادل آن است که سمت راست معادلات (11) و (12)را مساوی هم قرار دهیم و در آن به‌جای $cos\theta$ کمیت x و به جای $\frac{\alpha}{r}$ کمیت t را قرار دهیم معادله(13) تابع مولد به‌شمار می‌آید. در بخش بعد نشان خواهیم داد که $|p_n(cos\theta)|\leq 1$ ، یعنی بسط سلسله معادله (13) برای $|t|<1$ متقارب است. در واقع این سلسله برای $|t|=1$ آنکه $|x|=1$.

در واقع از آن جایی که معادله(13) چند جمله‌ای لژاندر $p_n(x)$ را تعریف می‌کند، تقارب سلسله ضروری نیست. حتی اگر سلسله متقارب هم باشد، باز می-توان مقادیر صریح چند جمله‌ای‌ها را به‌دست آورد و روابط مفیدی میان آن‌ها بر قرار کرد. در هرحال، خاصیت تقارب از آن رو مناسب است که بهره‌گیری از خواص سلسله توانی را می‌سازد (نیکوکار، ۱۳۹۵).

معادله (13) در کاربردهای فزیکی غالباً به‌صورت وکتوری زیر ظاهر می-شود.

$$\frac{1}{|r_1-r_2|}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r}\right)^n p_n(\cos\theta) \qquad (15)$$

که در آن برای

$r_> =$ $\quad$ ،$r_> = |r_1|$ ، $r_< = |r_2|$ ، $|r_1| > |r_2|$

$|r_2|$ ، $r_< = |r_1|$ ، $|r_2| > |r_1|$

تابع مولد را، با بهره‌گیری از قضیه دو جمله‌ای به صورت زیر بسط می‌دهیم.

$$(1-2\,xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\,n)!}{2^{2\,n}(n!)^2}(2\,xt-t^2)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\,n-1)!!}{(2\,n)!!}(2\,xt-t^2)^n \quad (16)$$

برای تعداد از اولین چند جمله‌ای‌های لژاندر، یعنی p_0 ، p_1 و p_2 به ضرایب t^0 ، t^1 و t^2 نیاز داریم. این توان‌ها تنها در جملات $n = 0,1,2$ ظاهر می‌شوند، از این رو می‌توانیم توجه خود را به سه جمله اولی سلسله متناهی، یعنی

$$\frac{0!}{2^0(0!)^2}(2\,xt-t^2)^0 + \frac{2!}{2^2(1!)^2}(2\,xt-t^2)^1$$
$$+\frac{4!}{2^4(2!)^2}(2\,xt-t^2)^2$$
$$= 1t^0 + xt^1 + \left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)t^2 + \theta t^3$$

معطوف کنیم. آنگاه با استفاده از معادله (16) و یکتایی سلسله توانی داریم

$$p_0(x) = 1 \text{ ، } p_1(x) = x \text{ ، } p_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

در روند به کار گیری یک راه حل کلی، پی می‌بریم که از بسط دو جمله‌ای عامل $(2\,xt-t^2)$ ، سلسله دوگانه زیر بدست می‌آید.

$$(1-2\,xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\,n)!}{2^{2\,n}(n!)^n} t^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!\,(n-k)!}(2\,x)^{n-k}t^k$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2\,n)!}{2^{2\,n} n!\,k!\,(n-k)!} (2\,x)^{n-k} t^{n+k} \qquad (17)$$

معادله (17) پس از باز آرایی به‌صورت زیر در می‌آید:

$$(1 - 2\,xt + t^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2\,n-2\,k)!}{2^{2\,n-2\,k} k!\,(n-k)!\,(n-2\,k)!} (2\,x)^{n-2\,k} t^n \qquad (18)$$

که در آن توان متغیر t از شاخص پایین k مستقل است. حال با مساوی قرار دادن جمله به‌جمله دو توانی (17) و (18) داریم

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2\,n-2\,k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2\,k)!} x^{n-2\,k} \qquad (19)$$

(آرفکن، 1387: 267).

مثال1: یک مثال از کاربرد معادله لژاندر عبارت است از توصیف پتانشیل جاذبه زمین، U (برای نقاط خارجی) با چشم پوشی از آثار سمتی. با توجه به شعاع استوایی زمین

$$\mathrm{R} = 63781 \pm 0.1\ km$$

$$\frac{GM}{R} = 62494 \pm 0{,}001 \frac{km^2}{s^2}$$

می‌نویسیم.

$$U\left(r.\theta\right) = \frac{GM}{R}\left[\frac{R}{r} - \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} p_n(\cos\theta)\right]$$

که یک سلسله لژاندر است. حرکت ماهواره‌های مصنوعی نشان داده است که

$$a_2 = (1082635 \pm 11) \times 10^{-9}$$

$$a_3 = (-25317) \times 10^{-9}$$

$a_4 = (-1600 \pm 12) \times 10^{-9}$

سایر ضرایب تا $n = 20$ محاسبه شده اند. که p_1 حذف شده است، زیرا این جمله نمایانگر یک جابجایی است، نه یک تغیر شکل. داده‌های ماهواره‌ای اخیر، تعیین وابستگی طول میدان گرانشی زمین را مسیر می‌سازد (آفکن، 1387: 291).

نتیجه‌گیری

از آن‌جایی‌که معادلات تفاضلی یکی از پر کاربردترین مسئله ریاضیات به شمار می‌رود و بسیار از مدل سازی مسائل، اغلب از معادلات تفاضلی استفاده می-کنند. دانشمندان زیادی در این زمینه کارهای مهم را انجام داده است. در ساحه کاربردی معمولاً به‌شکل از معادلات مواجه می‌شویم که دارای شکل ساده نیستند. معادلات که در ریاضیات کاربردی به آن‌ها مواجه می‌شویم اغلب معادلات هستند که ضرایب آن‌ها متغیر می‌باشد. به‌عنوان مثال معادله تفاضلی لژاندر نمونه از این معادلات می‌باشد که در فزیک و ریاضی از اهمیت خاصی برخورداراند (ناصر و همکاران، ۱۳۸۷). جواب‌های این معادلات را در حال کلی نمی‌توان بر حسب توابع مقدماتی بیان نمود ولی می‌توان برای آن‌ها جواب‌های به صورت سلسله به دست آورد. و همین طور دانستم که جواب‌های بعضی معادلات تفاضلی مهم در ریاضیات کاربردی هستند این توابع، توابع مقدماتی نبوده و با یک سلسله متقارب تعریف می‌شوند، این توابع را توابع خاص نام نهاده اند، توابع خاص در ریاضیات کاربردی فراوانند و به جواب‌های معادلات تفاضلی محدود نمی‌شوند. و بالاخره معادلات تفاضلی لژاندر را دانستم که جواب‌های این معادله در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات کاربردی حایز اهمیت هستند و همچنین چند جمله‌ای‌های لژاندر و خواص‌های مهم آنرا درک نمودم که این چند جمله‌ای‌ها دارای خواص قابل توجه هستند(ایوبی، ۱۳۹۱؛ کرایه‌چیان، ۱۳۸۷).

منابع

ایوبی، توفیق الله. (1391). **معادلات تقاضلی.** (چاپ دوم). کابل: انتشارات سعید.

افکن، جورج. (1387). **روشهای ریاضی در فزیک**(چاپ هشتم). ترجمه: اعظم پور قاضی. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

حسن پور، سید احمد. (1389). **معادلات دیفرانسیل** (چاپ دوم). بابل: نشر علوم رایانه.

دستمالچی ساعی، حاصل قوبی، فرهاد، رحمت. (1382). **معادلات دیفرانسیل معمولی**(چاپ اول). تهران: انتشارات مهر.

رحمانی دوست، محمد حسین. (1382). **مقدمه‌ای بر معادلات دیفرانسیل معمولی و کاربردهای آن** (چاپ اول). ایلام: انتشارات دانشگاه.

سیمونز، جرج ف. (1372). **معادلات دیفرانسیل و کاربرد آن‌ها**(چاپ چهارم). ترجمه: علی اکبر بابائی و ابوالقاسم میامئی. تهران: مرکز نشز دانشگاهی.

عرفانیان، اورعی‌احمد. سید، حسین. (1385). **معادلات دیفرانسیل همراه با پاسخ تمرینات قابل استفاده برای دانشجویان رشته‌های علوم و مهندسی**(چاپ چهارم). مشهد: انتشارات سناباد.

کرایه چیان، اصغر. (1387). **معادلات دیفرانسیل و کاربرد آن‌ها**(چاپ شانردهم). مشهد: انتشارات دانشگاه فردوسی.

ناصر، اسماعیل، علیرضا؛ عزیزی، یوسفی، جابری. (1387). **معادلات دیفرانسیل و کاربردهای آن**(چاپ چهارم). تهران: هیمه.

نیکوکار، مسعود. (1395). **معادلات دیفرانسیل همراه با برنامه‌های کامپیوتر**(چاپ چهل و چهارم). تهران: انتشارات آزاده.

Solving Legendre's Equation and Investigating its Applications in Physics

Abdul Razeq Rahmani

Department of Mathematics, Faculty of Education, Farah University

Email: raziqrahmani23@yahoo.com

Abstract

In this research, we examine Legendre differential equations, which are among variable-coefficient equations in applied mathematics. These equations are particularly significant due to their extensive applications in physics and mathematics. In general, the solutions to these equations cannot be expressed in terms of elementary functions, but solutions in the form of convergent series can be derived. This study demonstrates that many important differential equations in applied mathematics include functions described by special functions instead of elementary ones. The research method employed is library-based, and the analyses indicate that Legendre equations play a key role in providing solutions to various differential equations. Additionally, Legendre polynomials and their unique properties have been explored. Due to their remarkable characteristics, these polynomials are significant in numerous physical applications, such as the analysis of vibrations and wave phenomena. The findings of this research underscore the vital position of special functions and Legendre equations in advancing theoretical physics and advanced mathematics, and a deep understanding of them can lead to the development of new practical concepts in these fields.

Keywords: Physics, Applications, Equation, Legendre.