بررسی روش سیمپلکس برای حل مُدل‌های برنامه‌ریزی خطی

پوهنیار محمد یزدان پرست[1*]، پوهنمل فرهاد حکیمی[2]، پوهنیار احمدولی نوری[3]،
[1,2,3]دیپارتمنت ریاضی، پوهنځی تعلیم و تربیه، پوهنتون فراه
ایمیل: m.afghan7272@gmail.com

چکیده

امروزه، در مدل‌های برنامه‌ریزی خطیِ تحقیق در عملیات، به‌مسئله ترکیب تولید و نقش آن در تابع هدف، توجه کافی نشده است؛ مسئله‌ای که منجر به افزایش مصارف و کاهش کارایی در سیستم‌های تصمیم‌گیری گردیده‌است. در حالی‌که با استفاده از مدل‌های برنامه‌ریزی خطی می‌توان از مصارفی اضافی جلوگیری کرد. یکی از روش‌های مؤثر در حل این‌گونه مدل‌ها، روش سیمپلکس می‌باشد که به‌عنوان یک تکنیک پیشرفته و پرکاربرد تحقیق در عملیات شناخته می‌شود. این روش برای حل مدل‌هایی که شامل تابع هدف خطی و محدودیت‌های خطی هستند، طراحی شده و بالخصوص در مسائلی با بیش از دو متحول تصمیم، کاربرد دارد؛ برخلاف روش‌های ساده‌تری مانند روش ترسیمی که تنها برای دو متحول قابل استفاده‌اند. هدف از این تحقیق، معرفی و بررسی کامل روش سیمپلکس از میان سایر روش‌های درست به‌منظور کاهش مصارف اضافی و مطلوب‌سازی مؤثرتر تصمیم‌گیری‌ها می‌باشد. این تحقیق به‌صورت کتابخانه‌ای انجام شده و از منابع معتبر علمی استفاده گردیده‌است. یافته‌های تحقیق نشان می‌دهد که روش سیمپلکس یکی از ابزارهای کلیدی در تحلیل و ارائه اطلاعات در علوم مختلف به‌شمار می‌رود و توانایی بالایی در ساده‌سازی مفاهیم پیچیده و ارائه آن به‌صورت قابل درک برای مخاطبان دارد. در نتیجه، این میتود برای حل مدل‌های برنامه‌ریزی خطی تحقیق در عملیات با تمام جزئیات معرفی شد تا در فعالیت‌های روزمره، ضرر به حداقل و فایده به حداکثر رسانیده شود.

کلمات کلیدی: تابع هدف، حداقل، حداکثر، سیمپلکس و منطقه موجه.

مقدمه

در قرون اخیر تحقیق در عملیات از جمله مهم‌ترین شاخه‌های ریاضی به حساب آمده و تابع هدف مدل که عمده‌ترین بخش تحقیق در عملیات را تشکیل می‌دهد، سازمان را در قالب متحول‌های تصمیم توصیف می‌کند و همواره برای دریافت حداکثر عواید وحداقل مصارف مورد استفاده قرار می‌گیرد و براساس این تابع و شرایط منابع می‌توان بیشترین مفاد وکمترین ضرر یک سازمان را به صورت دقیق محاسبه کرد.

تحقیق در عملیات، یکی از شاخه‌های مهم و کاربردی ریاضیات است که به تحلیل و بهینه‌سازی سیستم‌های پیچیده می‌پردازد. این رشته علمی با استفاده از مدل‌سازی ریاضی، احصائیه و الگوریتم‌ها به مدیران و تصمیم‌گیرندگان کمک می‌کند تا با استفاده از اطلاعات موجود، بهترین تصمیمات را اتخاذ کنند. به دلیل پیچیدگی‌های موجود در بسیاری از مسائل صنعتی و اقتصادی، تحقیق در عملیات به ارائه راه‌حل‌های مبتنی بر دیتا ها و تحلیل‌های عمیق می‌پردازد. استفاده از تکنیک‌های بهینه‌سازی و تحلیل شبکه از جمله ابزارهای رایج در این رشته هستند. با توجه به تحولات افزایش اطلاعات، تحقیق در عملیات به یکی از ابزارهای کلیدی در مدیریت مدرن و تصمیم‌گیری تبدیل شده است. تحقیق در عملیات در بخش‌های مختلفی از جمله تولید، حمل‌ونقل، خدمات و مدیریت منابع انسانی کاربرد دارد. هدف اصلی این علم، به حداکثر رساندن سود و کاهش مصارف، زمان و منابع در سیستم‌ها است(مهرگان، ۱۳۹۴: ۱).

برای دریافت بیشترین سود و کمترین هزینه یک مؤسسه و یا حتی یک شرکت کوچک، نیاز به دریافت راه حل‌هایی است تا بتوان فهمید که متحول‌های تابع هدف چگونه تغییر کنند، تا سود مؤسسه یا شرکت حداکثر و هزینه آن‌ها حداقل گردد. برای این منظور، روش‌های متعددی وجود دارد که از آن جمله روش

سیمپلکس برای حل مدل‌های برنامه‌ریزی خطی تحقیق درعملیات را می‌توان نام برد(ابراهیمی باران، ۱۳۹۱: ۵۰).

بناء روش سیمپلکس از جمله روش‌های کارا و مفید برای حل مدل‌های برنامه-ریزی خطی بیشتر از دو متحول بوده. در این تحقیق کوشش به عمل آمده تا اولاً شناخت مدل‌های برنامه‌ریزی خطی به صورت دقیق انجام گیرد و ثانیاً به راه‌های بهینه‌سازی پرداخته شده، تا علاقه‌مندان بتوانند به صورت دقیق از آن استفاده نمایند. پس این موضوع ضرورت خاص برای تحقیق داشته و نقش بسیار مهم را در تولیدات یک کارخانه، پیشبرد امور شرکت‌ها، کارخانه‌جات و حتی در زندگی روزمره ایفاء می‌کند.

روش تحقیق

روش تحقیق در مقاله هذا از نوع کتابخانه‌ای بوده و از منابع معتبر علمی که توسط مولفین در سال‌های اخیر تالیف شده است، استفاده به عمل آمده است.

تعریف برنامه‌ریزی خطی

برنامه‌ریزی خطی شامل مدلی است با یک تابع هدف و چند محدودیت که روابط خطی بین متحول‌های آن در تابع هدف با محدودیت‌ها وجود دارد و یا مدلی ریاضی برای جست‌وجو و انتخاب بهترین برنامه (روش انجام کار) ازمیان ست راه های ممکن هست. ازآنجا که تمامی روابط ریاضی این مدل از نوع درجه یک هستند، مدل، خطی نامیده می‌شود(آذر،1394: 30).

در بکارگیری برنامه‌ریزی خطی باید سه مرحله اساسی را در نظر گرفت. اول آنکه مسئله، باید به گونه‌ای تعریف شود که با استفاده از برنامه‌ریزی خطی قابل حل باشد. دوم آنکه مسئله، باید در قالب یک مدل ریاضی نوشته شود. و سوم آنکه مسئله، باید با استفاده از یک روش مشخص ریاضی قابل حل باشد. نام برنامه‌ریزی خطی برگرفته از این واقعیت است که روابط کار کردی در مدل ریاضی خطی و

روش حل مدل شامل مراحل ریاضی از پیش تعیین شده به عنوان یک برنامه است (مهرگان، ۱۳۹٤: ٤٤)[۲۷].

مدل سازی

اجزای مدل عبارت اند از: متحول‌های تصمیم، تابع هدف و محدودیت‌های مدل. ساختار تا بع هدف ومحدودیت‌های مدل برنامه‌ریزی خطی از متحول‌های تصمیم و پارامترها شکل می‌گیرد. متحول‌های تصمیم شامل سمبول‌های ریاضی است که سطح فعالیت هر مؤسسه را بیان می‌کند. برای مثال، یک کارخانه سازنده وسایل الکتریکی تمایل دارد x_1 موتر، x_2 سیکل و x_3 رادیو تولید کند. سمبول-های x_2, x_1 و x_3 هر یک بیانگر مقادیر ناشناخته از سطح تولید موتر، سیکل و رادیو است. مقادیر نهایی x_1 ، x_2 و x_3 که به وسیله کارخانه تعیین می‌شود، یک تصمیم را برای کارخانه بیان می‌کند. برای مثال، $x_1 = 50$ بیانگر این است که کار خانه تصمیم گرفته 50عراده موتر تولید کند. همچنان متحول‌های تصمیم دربرنامه ریزی‌خطی به عنوان متحول‌های مستقل شناخته شده که مقدار شان نامشخص است وتصمیم گیرنده باید مقدار این متحول‌ها را بعد از حل مدل به دست آورد. معمولاً این متحول‌ها درمدل با $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ نمایش داده می‌شود. هر مدل برنامه‌ریزی خطی از سه قسمت تشکیل می‌شود(آذر، 1394: 33).

1) تابع هدف[۲۸]: یک رابطه ریاضی خطی است که هدف مؤسسه را در قالب متحول‌های تصمیم توصیف می‌کند یا تابعی است ریاضی که از متحول‌های تصمیم تشکیل یافته وبیانگر هدف مدل هست. این تابع نشان دهنده خواسته ها وآرزوهای تصمیم گیرنده، مانند حداکثر کردن سود یا حداقل کردن هزینه است.

تابع هدف مدل برنامه‌ریزی‌خطی عمداً به یکی از دو صورت زیر است:

1. Program

28 . Objective Function

$$Maxz = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \text{یا} \quad Minz = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

2) محدودیت[۲۹]: عبارت است ازیک معادله یا نامعادله از متحول‌های تصمیم که محدودیت‌های مدل(یا تصمیم گیرنده) را برای دستیابی به اهداف مدل بیان می‌کند.

3) وضعیت های متحول‌های تصمیم، متحول تصمیم با توجه به مصداق واقعی تعین شده برای آن عمدتاً به یکی از دوصورت زیر است:

الف) متحول تصمیم غیرمنفی $x_j \geq 0 \qquad (j = 1, .., n)$

ب) متحول تصمیم آزاد درعلامت. دراین حالات x_j می‌تواند مقادیر مثبت، منفی یا صفر را اختیار کند.

شکل کلی مدل برنامه‌ریزی خطی بصورت زیر است.

$$(\text{بهینه کنید}) z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n (\leq \text{ یا } \geq \text{ یا } =) b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n (\leq \text{ یا } \geq \text{ یا } =) b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n (\leq \text{ یا } \geq \text{ یا } =) b_3$$

$$\vdots$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n (\leq \text{ یا } \geq \text{ یا } =) b_i$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n (\leq \text{ یا } \geq \text{ یا } =) b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \text{ یا } (\text{متحول‌های آزاد درعلامت})$$

که درآن: برای $j = 1,2, \ldots, n$ و x_j متحول تصمیم، z مقدار تابع هدف،

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ ضرایب متحول‌های تصمیم درتابع هدف،

$a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{in}$ضرایب متحول‌های تصمیم درمحدودیت ها،

29 . Constraint

$b_1, b_2, \dots, b_3$ اعداد سمت راست، n تعداد متحول‌های تصمیم و m تعداد محدودیت ها (Solow, 1994 & Mathur)

مدل کلی برنامه ریزی خطی فوق دارای مشخصات زیر است

۱. تابع هدف به صورت Max یا Min است.

۲. هرمحدودیت از مدل فقط یکی از سه حالت $(\geq, =, \leq)$ را می‌تواند اختیار کند. اما دریک مدل، چندین محدودیت با علامت‌های مختلف می‌تواند وجود داشته باشد.

۳. هرمتحول تصمیم می‌تواند غیر منفی یا آزاد درعلامت باشد.

٤. مقادیر a_{ij}, b_i, c_j ($j = 1, \dots, n$ و $i = 1, \dots, m$) مقادیر ثابت است که به‌عنوان دانسته‌های مدل، ازقبل تعیین شده وپارامتر نامیده می‌شود(مهرگان، 1374: 20).

تعریف برخی دیگر ازکلمات مورد استفاده در برنامه‌ریزی خطی

۱) جواب[۳۰]: در فرهنگ برنامه‌ریزی خطی منظور از (جواب) جواب نهایی مسئله نیست، بلکه هر ست از قیمت‌های که به متحول‌های تصمیم اختصاص یابد یک جواب نامیده می‌شود، خواه چنین جوابی مطلوب باشد خواه نباشد یا این ست قیمت‌ها در محدودیت صدق کند یا نکند.

۲) جواب موجه[۳۱]: جوابی است که در تمام محدودیت‌ها صدق می‌کند.

۳) جواب غیر موجه: جوابی است که در محدودیت‌ها صدق نمی‌کند.

٤) جواب بهینه[۳۲]: بهترین جواب موجه است یا جواب مواجهی است که به ازای آن تابع هدف به مطلوب‌ترین وضعیت در می‌آید.

30. solution
31. feasible solution
32 . optimal solution

۵) معادله حدی : معادله حدی هر محدودیت با جایگزین کردن علائم≥ ، ≤ یا با علامت =به‌دست می‌آید. وجه تسمیه این است که معادلات به دست آمده، حد یا مرز منطقه موجه را بیان می‌دارند.

٦) منطقه موجه[33] : ست جواب‌های موجه، منطقه موجه را ایجاد می‌کند.

٧) جواب گوشه[34]: مقادیر تخصیص داده شده به متحول‌های تصمیم ناشی ازتقاطع (معادلات حدی) جواب گوشه نامیده می‌شود (Bronson R. , 1992).

روش سیمپلکس برای حل مدل‌های برنامه‌ریزی خطی

یک عمل کرد ریاضی به نام روش سیمپلکس، برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی معرفی می‌شود. این روش یک فن کلی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی است. در روش سیمپلکس، ابتدا مدل ازطریق جدول ارائه می‌شود وسپس یک سری مراحل ریاضی درجدول اجرا می‌گردد. مراحل ریاضی روش سیمپلکس به نحو اثر بخشی، بیانگر فرایند حرکت در روش ترسیمی است که جهت حرکت را ازیک گوشه به گوشه دیگر نشان می‌دهد. برخلاف روش ترسیمی که باید تمام گوشه‌های موجه را برای یافتن گوشه بهینه جستجو کرد، در روش سیمپلکس باید همواره ازیک گوشه به گوشه‌ای بهتر حرکت کرد تا بهترین گوشه را یافت ودرآنجا توقف کرد.

ازآن‌جا که درک بهتر مسئله سیمپلکس نیازمند آشنایی با روش حذفی گوس ـ جردن است، ابتدا به توضیح مختصر آن می‌پردازیم، سپس بحث روش سیمپلکس را ادامه می‌دهیم (مهرگان، 1394 : 48).

---

33 . feasible region

34 . corner point solution

شکل استندرد

شکل استندرد شکلی است که درتحقیق درعملیات به‌منظور ایجاد اندیشه عمومی وهماهنگ درحل مسئله به‌کار گرفته می‌شود. این شکل ثابت ویکسان نیست وبه-صورت‌های گوناگون معرفی می‌شود. خصوصیات شکل استندرد به‌شرح زیر است

1. تابع هدف مسئله باید به صورت Max باشد.
2. تمام محدودیت‌ها به‌صورت «کوچکتر یا مساوی» باشند.
3. همه متحول‌ها غیرمنفی باشند. $x_j \geq 0 \; (j = 1, \dots, n)$

در صورتی که هریک از سه شرط فوق، نقض شود، شکل مسئله غیر استندرد خواهد شد. به‌این ترتیب، مسائل شکل غیر استندرد مسائلی هستند که تابع هدف آن‌ها Min باشد، یا شامل محدودیت‌هایی به‌صورت «بزرگ‌تریا مساوی» یا «مساوی» باشند، یا شامل متحول‌های آزاد در علامت باشند.

یک مسئله شکل استندرد به‌صورت زیر است:

$$MaxZ = \sum_{j=0}^{n} c_j x_j$$
$$s.t. \;\; \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \;\; i = (1, \dots, m)$$
$$x_j \geq 0 \qquad j = (1, \dots, n)$$

مقدمات وساختار الگوریتم سیمپلکس

روش سیمپلکس $(Simplex)$ یا به‌طور دقیق‌تر الگوریتم سیمپلکس، روش برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با n متحول است. الگوریتم سیمپلکس در حقیقت مراحل رسیدن به‌هدف حلی قدم به‌قدم و تکراری است، که در آن یک شکل سیستماتیک آن قدر تکرار می‌شود تا سرانجام به‌جواب مطلوب برسد. ست قدم‌هایی که در چنین عملیه به‌طور سیستماتیک هر دفعه تجدید می‌شود، تکرار نامیده می‌شود.

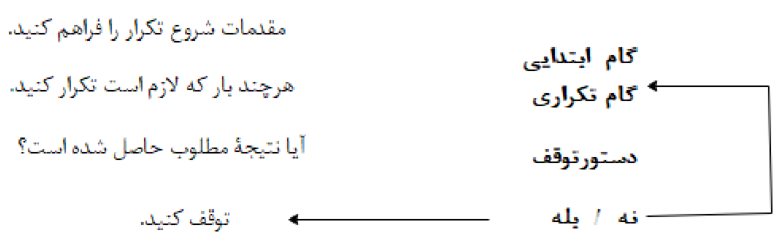
سیمپلکس عمدتاً عملیات خود را از مبدأ مختصات شروع می‌کند. مبدأ مختصات و نقاط دیگری که از محل تقاطع سایر معادلات حدی به‌وجود می‌آیند، **نقاط گوشه** نامیده می‌شوند. جواب حاصل از نقاط گوشه، **جواب گوشه** نامیده

می‌شود و در صورتی‌که نقطه مربوط به‌منطقه موجه باشد، جواب، **گوشه موجه** نام خواهد گرفت. سیمپلکس بعد از شروع از مبدأ مختصات، به سمت یک نقطه گوشه موجه مجاور که مقدار تابع هدف را بهبود می‌بخشد، حرکت خواهد کرد. این کار را تا رسیدن به‌نقطه‌ای موجه که ازنقاط موجه اطرافش بهتر باشد، ادامه می‌دهد. این نقطه، نقطه بهینه است.

قضیه: هرنقطه گوشه موجه که ازنقاط گوشه موجه مجاورش بهتر باشد، نقطه بهینه است.

در صورتی‌که یک مسئله برنامه‌ریزی خطی دارای جواب بهینه باشد، پروسه سیمپلکس باید به‌جواب بهینه منتهی گردد، زیرا در هر تکرار تابع هدف بهبود می- یابد، تا جواب بهینه به‌دست آید(لی، 1374: 49).

الگوریتم سیمپلکس، مانند سایر الگوریتم‌های تحقیق در عملیات، شامل گام‌های زیر است.



روش سیمپلکس یک روش جبری است که هر تکرار آن مستلزم حل یک سیستم معادله برای به‌دست آوردن یک جواب جدید است. از آنجا که عملیات با معادلات ساده‌تر از معادلات است. ضرورت تبدیل محدودیت‌های « نامساوات » به « معادله » آشکار می‌شود « متتغیر های برابر ساز » این وظیفه را به‌عهده دارند.

متحول‌های برابر ساز

همان‌طور که از نام‌شان پیداست، متحول‌های برابر ساز متحول‌هایی با مقدار غیر منفی هستند که به‌محدودیت‌های «کوچک‌تر یا مساوی» یا (بزرگ‌تر یا مساوی) اضافه یا از(آن‌ها کم) می‌شوند و محدودیت‌ها را به‌تساوی تبدیل می‌کنند. تحقیق

در عملیات متحول‌های برابر ساز را عمدتاً به s نشان می‌دهند و با توجه به نوع کاربرد آن‌ها، از اسامی متفاوتی استفاده می‌کنند. در بعضی موارد، در حالت اضافه شدن s به سمت چپ محدودیت‌های کوچک‌تر یا مساوی آن را متحول کمکی (*slack*) و در وضعیت و تفاضل آن‌ها از محدودیت‌های بزرگ‌تر یا مساوی آن را مازاد (*surplus*) می‌نامند. در هر دو وضعیت متحول s متحول کمکی نامیده می‌شود(لی، 1374: 49).

مثال1: محدودیت‌های نامساوات‌ای زیر را با استفاده ازمتحول‌های کمکی به‌معادله تبدیل کنید.

$$x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

ازآن‌جا که محدودیت به‌صورت کوچک‌تر یا مساوی است، متحول کمکی s به سمت چپ اضافه می‌شود و معادله زیر به‌دست می‌آید.

$$x_1 + x_2 + s = 3$$
$$x_1, x_2, s \geq 0$$

محدودیت بعد، حالت بزرگ‌تر یا مساوی را نشان می‌دهد.

دراین وضعیت چون سمت چپ نامساوات بیش‌تر از سمت راست است، متحوله کمکی s از آن کم شده است.

$$3x_1 + 4x_2 \geq 16$$
$$\Rightarrow 3x_1 + 4x_2 - s = 16$$
$$x_1, x_2, s \geq 0$$

در صورتی‌که محدودیت به صورت تساوی باشد، نیازی به‌استفاده از متحول کمکی نیست.

مقدار s با توجه به نمایش ترسیمی محدودیت نامساوی مربوط به آن و هرجواب (موجه یا غیرموجه) دارای یکی از سه وضعیت زیر است.

$s > 0$ است، هرگاه نقطه جواب در منطقه موجه محدودیت باشد.

$s < 0$ است، هرگاه نقطه جواب خارج از منطقه موجه محدودیت باشد

$s = 0$ است، هرگاه نقطه جواب روی معادله حدی مربوط به محدودیت باشد.

جدول سیمپلکس

برای راحتی و کارآیی در محاسبات به‌طریق دستی، از جدولی معروف به جدول سیمپلکس استفاده می‌شود. در ناحیه برنامه‌ریزی خطی، شکل جدول مورد استفاده ثابت و استندرد نیست، ولی ساختار اصلی آن یکسان است و تقریباً اطلاعات مشابهی را ارائه می‌کند.

جدول(۱) ساختار اساسی جدول سیمپلکس

حداکثرها	اعداد سمت راست	$Z \quad x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n \quad s_1 \quad s_2 \quad \cdots \quad s_m$	شماره سطر	متحول‌های اساسی
	0	$1 \quad . \quad . \quad \cdots \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0$	0	z
چه متحولی خروجی است؟	جواب مسئله	$1 \quad . \quad . \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$	1	n متحول اساسی
		$0 \quad . \quad . \quad \cdots$ ضرایب متحولها $\cdots \quad \cdots$	2	
		$. \quad . \quad . \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$	.	
		$. \quad . \quad . \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$	.	
		$0 \quad . \quad . \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$	m	

مثال2: به‌منظور تولید دوکالای مختلف از چهار منبع b, c, d و a استفاده می‌شود. کل مقادیر موجود از هر یک از عوامل تولید فوق عبارت است از $a = 9$، $b = 7$، $c = 22$ و $d = 32$. تولید هر واحد از کالای اول مستلزم مصرف 1 واحد از عامل a، 2 واحد از عامل c و 1 واحد از عامل d است و برای تولید هر واحد از کالای دوم باید 1 واحد از عامل b و یک 1 از عامل c و 4 واحد از عامل d را به کار برد.

سود خالص تولید کننده از تولید هر واحد کالای اول و دوم، به ترتیب 1 و 3 است. از هر نوع کالا چه مقدار باید تولید شود تا سود حداکثر شود؟

اگر مقدار تولید محصول با x_1 و محصول دوم با x_2 نشان داده شود، مدل مسئله فوق به‌صورت زیر است.

$$MaxZ = x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\ x_1 \le 9$$
$$x_2 \le 7$$
$$2x_1 + 4x_2 \le 32$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

با اضافه کردن مقادیر غیر منفی s_i محدودیت‌ها را به‌معادله تبدیل می‌کنیم. به بیانی دیگر با افزودن متحول‌های کمکی به‌سمت چپ نامعادلات، مسئله به این صورت در می‌آید.

$$MaxZ = x_1 + 3x_2$$
$$s.t.\ x_1 + s_1 = 9$$
$$x_2 + s_2 = 7$$
$$2x_1 + 4x_2 + s_3 = 32$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \ge 0$$

توجه کنید که در این حالت، مسئله دارای چهار معادله (چهار محدودیت) و 6 متحول است. این سیستم معادله در صورتی جواب یکتا دارد که تعدادی معادلات با متحول‌ها مساوی و مترکس ضرایب آن معکوس پذیر باشد. بر این اساس باید به دو متحول، مقدار ثابت اختصاص داد. ساده ترین وضعیت، حالتی است که هنوز در مورد تولید هیچ یک از دو کالا تصمیمی نگرفته‌ایم یعنی

$x_1 = x_2 = 0$ این حالت نشان‌دهنده مبدأ مختصات است. پس در واقع نقطه گوشه به دو سؤال فوق پاسخ می‌دهد و تعیین می‌کند کدام یک از دو متحول باید انتخاب شود و بقیه متحول‌ها را بر حسب آن نوشت. در مبدأ مختصات x_2 و x_1 و مقداری که به آن اختصاص داده می‌شود صفر است. یعنی وقتی هیچ تولیدی نداشته باشیم تمام منابع باقی می‌ماند. در این وضع $s_4 = 32$، $s_3 = 22$، $s_2 = 7$، $s_1 = 9$، $x_1 = 0$ و $x_2 = 0$ خواهد بود. یعنی برای جواب گوشه موجه فوق (یعنی $x_2 = 0, x_1 = 0$)، به‌جوابی مفصل‌تر با تعیین مقادیری برای متحول‌های کمکی دست یافتیم. به‌این جواب جدید که بیانگر وضعیت شش متحول است، «جواب گسترده گوشه موجه» یا به‌صورت ساده‌تر «جواب اساسی

موجه» می‌گویند. در صورتی که جواب گوشه، غیر موجه باشد، طبیعتاً جواب گسترده گوشه آن نیز غیر موجه است یا به‌عبارت دیگر جواب اساسی غیر موجه است.

در جواب گسترده گوشه مربوط به‌مبدأ مختصات x_1 و x_2 متحول‌های غیر اساسی و S_1، S_2 ، S_3 و S_4 متحول‌های اساسی هستند. پس به‌این ترتیب در حل هر سیستم معادله تعداد متحول‌های اساسی با تعداد محدودیت‌ها برابر است و به متحول‌های بیش از تعداد محدودیت‌ها مقدار صفر اختصاص داده می‌شود که غیر اساسی نامیده می‌شوند.

اصطلاح دیگری که باید معرفی شود «معادلات معرف» است. هر نقطه گوشه با یک سری معادلات تعریف می‌شود که آن‌ها را معادلات معرف می‌نامند.

مثلاً برای معرفی مبدأ مختصات از دو معادله $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ استفاده می‌شود آن‌ها را «معادلات معرف» می‌گویند.

اولین سؤالی که در ادامه بحث به‌ذهن می‌رسد این است که با منابع موجود اگر قرار باشد در این مرحله فقط یک محصول تولید شود، کدام محصول انتخاب می‌شود؟

به‌عنوان یک قرارداد بهتر است محصولی تولید شود که تولید هر واحد آن سود بیش‌تری داشته باشد.

طبیعتاً محصول دوم انتخاب می‌شود چون سود هر واحد آن 3 است. در حالیکه تولید یک عدد محصول اول تنها یک واحد سود عاید می‌کند، پس تولید محصول دوم بدین معنی است که مقدار x_2 که مساوی صفر است، به مقادیری غیر صفر تغییر می‌یابد. یعنی، متحول غیر اساسی x_2 به متحول اساسی تبدیل می‌شود. به عبارت دیگر از مبدأ مختصات روی محور x_2 به‌سمت بالا حرکت می‌کنم.

طبیعتاً محصول دوم انتخاب می‌شود چون سود هر واحد آن 3 است. در حالی‌که تولید یک عدد محصول اول تنها یک واحد سود عاید می‌کند، پس تولید محصول

دوم بدین معنی است که مقدار x_2 که مساوی صفر است، به‌مقادیری غیر صفر تغییر می‌یابد. یعنی، متحول غیر اساسی x_2 به‌متحول اساسی تبدیل می‌شود. به‌عبارت دیگر از مبدأ مختصات روی محور x_2 به‌سمت بالا حرکت می‌کنم (مهرگان، ۱۳۹۴: ۵۲).

تعریف نقاط گوشه مجاور: دو نقطه گوشه، وقتی مجاور هستند که خط واصل آن دو نقطه روی یکی از معادلات حدی قرار گیرد یا به‌عبارت دیگر دو نقطه گوشه مجاور یک معادله معرف غیر مشترک دارند.

قضیه: هرگاه یک جواب گوشه موجه ازجواب‌های گوشه مجاور خود بهترباشد آن جواب گوشه موجه، جواب بهینه است.

تدارک مقدمات شروع تکرارهای سیمپلکس

در مسائل شکل استندرد، همان طور که قبلاً گفته شد، ابتدا باید با اضافه کردن متحول‌های کمکی محدودیت‌ها را به‌تساوی تبدیل‌کرد. سپس به‌منظور هماهنگی تابع هدف و محدودیت‌ها، متحول‌های تصمیم به‌سمت چپ تساوی منتقل شوند (Bronson R. , 1992).

مثال3: انجام عملیات فوق برای مثال 2 وضعیت زیر را ارائه می‌کند.

$$MaxZ - x_1 - 3x_2 = 0$$
$$s.t.\quad x_1 \quad + s_1 = 9$$
$$x_2 + s_2 = 7$$
$$2x_1 + x_2 \quad + s_3 = 22$$
$$x_1 + 4x_2 \quad + s_4 = 32$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

برای انجام عملیات فوق مسئله برای ورود به جدول سیمپلکس مهیا می‌شود.

ساختار الگوریتم سیمپلکس

ساختار سیمپلکس مانند هرالگوریتم دیگر شامل قدم‌های ابتدایی، تکراری و دستور توقف است. این ساختار برای تمام الگوریتم‌های برنامه‌ریزی خطی به کار گرفته می‌شود.

قدم ابتدایی ازیک نقطه گوشه موجه ابتدایی شروع کنید.

قدم تکراری به یک نقطه گوشه موجه مجاور بهتر حرکت کنید.

دستور توقف اگر یک نقطه موجه، از نقاط گوشه موجه مجاورش بهتر باشد، آن نقطه بهینه است. توقف کنید.

عملیات سیمپلکس با استفاده از هر نقطه گوشه موجه می‌تواند آغاز شود. اما، مبدأ مختصات یک انتخاب مناسب است و در اکثر مسائل، نقطه آغازین مبدأ مختصات است. در این وضعیت $(j = 1, \dots, n)$، $x_j = 0$ است و مقدار متحول‌های کمکی که به مسئله اضافه می‌شوند دارای مقدار غیر صفر هستند $(i = 1, \dots, m)$، $s_i \neq 0$. به‌این ترتیب **متحول‌های اساسی شروع مسئله** (در شکل استندرد) **متحول‌های کمکی، متحول‌های غیراساسی و متحول‌های تصمیم هستند**.

روش انجام قدم‌های تکراری و دستور توقف در ضمن مثال*2* زیر توضیح داده شده است.

مثال3: مثال *1* را در نظر بگیرید. بعد از افزودن متحول‌های کمکی به مسئله، داتاهای آن را می‌توان به‌شکل زیر درجدول سیمپلکس وارد کرد.

جدول (2) جدول ابتدایی (تکرار صفر)

ستون لولا

Basic variables	Line numbar	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Number on right	Maximums
Z	0	1	-1	-3	0	0	0	0	0	
s_1	1	0	1	0	1	0	0	0	9	∞
s_2	2	0	0	1	0	1	0	0	7	7
s_3	3	0	2	1	0	0	1	0	22	22
s_4	4	0	1	4	0	0	0	1	32	8

عدد لولا

سطرلولا

توجه کنید که جدول فوق مبدأ مختصات را ارئه می‌کند، چون مقدار x_1 و x_2 به علت غیراساسی بودن صفر است و به عبارت دیگر درحل سیستم چهار معادله وشش متحوله مسئله به‌روش گوس- جردن s_1, s_2, s_3, s_4 را برحسب مقادیر x_1 و x_2 به‌دست آورده‌ایم یا از آن‌جا که به $(m+n)-m=n$ متحول باید مقدار ثابت اختصاص یابد تا مسئله دارای یک جواب باشد. اولین جدول در شکل استندرد که مبدأ مختصات ارائه می‌کند به دو متحول x_1 و x_2 مقدار صفر اختصاص داده و جواب سیستم را برحسب متحول‌های کمکی ارائه کرده است. به طورکلی در روش سیمپلکس در هر تکرار یا حرکت از مبدأ مختصات برای بهبود مقدار تابع هدف مرتباً به دو متحول مقدار ثابت اختصاص می‌یابد. این دو متحول مقدار صفر دارند و به شیوه گوس- جردان جواب جدید به‌دست می‌آید.

در اینجا می‌توان کلیات روش سیمپلکس را به‌صورت ساده خلاصه کرد. در این روش، سیستم معادلات به‌دنبال ست از جواب‌های اساسی موجه به طور پی‌درپی حل می‌شود، به‌طوری که هر جواب اساسی موجه جدید نسبت به‌جواب قبلی بهتر باشد، تا در نهایت یک جواب بهینه به‌دست آید. این پروسه با تبدیل یکی از متحول‌های غیر اساسی به‌متحول اساسی (متحول ورودی) و در مقابل، تبدیل یکی از متحول‌های اساسی به‌غیر اساسی (متحول خروجی) انجام می‌گیرد. در واقع، تنها تفاوت بین دو جواب اساسی موجه مجاور، تعویض یکی از متحول های اساسی با یک متحول غیر اساسی است.

قدم‌های ابتدایی

متحول‌های کمکی s_1, s_2, s_3 و s_4 را به‌ترتیبی که گفته شد به‌محدودیت‌ها اضافه کنید. آن‌گاه متحول‌های تصمیم (x_1, x_2) را به‌عنوان متحول‌های غیراساسی ابتدایی، مساوی صفر قرار دهید و متحول‌های کمکی را به‌عنوان متحول‌های اساسی انتخاب کنید. ازآن‌جا که هر معادله فقط شامل یک متحول اساسی باضریب $+1$ است، لذا مقدار هر متحول اساسی برابر با عدد ثابت طرف راست معادلات است.

متحول‌های اساسی در تمام جداول باید درسطر خود (سطری که متحول اساسی درآن واقع شده) $+1$ و در بقیه سطرها ضریب صفر داشته باشند. تمام عملیات تکراری به این نتیجه می‌رسد.

دستور توقف

اگر تمامی ضرایب سطر صفر مقادیر غیرمنفی باشند، در این صورت جواب اساسی موجه به‌دست آمده بهینه است و پروسه باید متوقف شود. در غیر این صورت، برای یافتن جواب اساسی موجه بعدی، به‌مرحله تکرار مراجعه می‌شود که شامل جایگزینی یک متحول غیر اساسی با یک متحول اساسی و تعیین جواب جدید است در جدول 3 دو ضریب منفی در معادله صفر وجود دارند: -3 برای x_2 و -1 برای x_1. بنابراین به قدم تکراری بروید(مهرگان،۱۳۹۴: ٦١).

قدم تکراری

قسمت اول: متحولی که دارای بزرگ‌ترین ضریب منفی در سطر صفر است را به عنوان متحول اساسی ورودی انتخاب کنید (این، یک متحول غیراساسی است که وقتی از صفر بیش‌تر شود مقدار x_2 را با تندترین آهنگ افزایش می‌دهد). مستطیلی به دور ستونی که زیر این متحول قرار دارد بکشید و آن را « ستون لولا» بنامید.

در این مثال بزرگ‌ترین ضریب منفی (-3) مربوط به x_2 است، بنابراین x_2 به عنوان متحول ورودی انتخاب می‌شود.

قسمت دوم: متحول خروجی را مشخص کنید.

الف) ضرایب مثبت ستون لولا را در نظر بگیرید.

ب) اعداد سمت راست را به این ضرایب تقسیم کنید.

ج) سطری را انتخاب کنید که دارای کم‌ترین مقدار حاصل در قسمت (ب) باشد.

د) متحول اساسی مربوط به این سطر، متحول اساسی خروجی است (این همان متحول اساسی است که براثر افزایش مقدار متحول ورودی قبل از همه به صفر می-رسد). مستطیلی به دور این سطر بکشید و آن را « سطر لولا » بنامید. عددی که در

محل تقاطع دو مستطیل قرار می‌گیرد، به «عدد لولا» موسوم است. نتایج قسمت‌های اول و دوم مثال مورد بحث در جدول 2 نشان داده شده است. بنابراین s_2 متحول خروجی است.

قسمت سوم: جواب اساسی جدید را به کمک یک جدول سیمپلکس جدید به‌دست آورید. سه ستون اول جدول تغییری نمی‌کنند، فقط در ستون اول متحول اساسی و رودی به‌جای متحول اساسی خروجی قرار می‌گیرد. برای تبدیل ضرایب متحول اساسی جدید به $+1$ ، تمام سطر لولا را بر عدد لولا تقسیم کنید. بنابراین:

$$\text{سطر لولای جدید} = \frac{\text{سطر لولای قدیم}}{\text{عدد لولا}}$$

محاسبات که تا این‌جا انجام شده است. برای آن‌که متحولاساسی جدید از سایر معادلات حذف شود، هرسطر (از جمله سطر مربوط به معادله صفر) به‌استثنای سطر لولا به ترتیب زیر به جدول جدید تغییر می‌یابد.

$$\text{سطر جدید} = \text{سطر قدیم} - \left(\text{ضریب ستون لولا}\right) \times \text{سطر لولای جدید}$$

دراین‌جا منظور از ضریب ستون لولا، عددی است که درستون لولا و مقابل آن سطر قرار می‌گیرد. برای تشریح مطلب، سطرهای جدید مثال مورد بحث در زیر محاسبه می‌شوند.

سطر صفر:

$$\begin{array}{r}
[1\ -1\ -3\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0] \\
3\,[0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 7] \\
\hline
[1\ -1\ \ 0\ \ 0\ \ 3\ \ 0\ \ 0\ \ 21]
\end{array}$$

سطر 1: چون ضریب سطر لولا صفر است، لذا در این حالت، سطر جدید همان سطر قدیم خواهد بود.

سطر 3:

$$\begin{array}{r}
[0\ \ 2\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 22] \\
-1\,[0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 7] \\
\hline
[0\ \ 2\ \ 0\ \ 0\ -1\ \ 1\ \ 0\ \ 15]
\end{array}$$

سطر 4:

$$
\begin{array}{r}
[0\ \ 1\ \ 4\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 32] \\
-4\ \ \underline{[0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 7]} \\
[0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ -4\ \ 0\ \ 1\ \ 4]
\end{array}
$$

جدول 3 اولین تکرار سیمپلکس مربوط به مثال قبل

Basic variables	Line number	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	R.H.S	maximums
Z	0	1	-1	0	0	3	0	0	21	
s_1	1	0	1	0	1	0	0	0	9	9
x_2	2	0	0	1	0	1	0	0	7	∞
s_3	3	0	2	0	0	-1	1	0	15	7.5
s_4	4	0	1	0	0	-4	0	1	4	4

شرط درست در این تکرار نیز برقرار نیست، لذا قدم تکراری را ادامه می‌دهیم تا تمام اعداد سطر صفر غیرمنفی و شرط دستور توقف برقرار شود. برای جواب نهایی دو تکرار دیگر باید انجام داد که در جدول 4 آمده است:

جدول (4) تکرارهای 2 و 3 مسئله از مثال 2 است

Basic variables	Line number	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	R.H.S	Maximums
Z	0	1	0	0	0	-1	0	1	25	
s_1	1	0	0	0	1	4	0	-1	5	1.25
x_2	2	0	0	1	0	1	0	0	7	7
s_3	3	0	0	0	0	7	1	-2	7	1
x_1	4	0	1	0	0	-4	0	1	4	_
Z	0	1	0	0	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{7}$	26	
s_1	1	0	0	0	1	0	$-\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1	
x_2	2	0	0	1	0	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	6	
s_2	3	0	0	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	1	
x_1	4	0	1	0	0	0	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	8	

چون تمام اعداد سطر صفر جدول آخر غیرمنفی است، این جدول نهایی است و جواب درست عبارت است از:

$$x_1{}^* = 8, x_2{}^* = 6, s_1{}^* = 1, s_2{}^* = 1, s_3{}^* = 0, s_4{}^* = 0, Z^* = 26$$

نتیجه‌گیری

روش سیمپلکس به‌عنوان یکی از پیشرفته‌ترین و کارآمدترین ابزارهای حل مدل‌های برنامه‌ریزی خطی تحقیق در عملیات، جایگاه خاصی در بخش بهینه‌سازی دارد. این روش با استفاده از یک الگوریتم گام‌به‌گام و حرکت میان نقاط گوشه موجه، توانایی دستیابی به جواب درست را در چارچوب محدودیت‌های موجود فراهم می‌سازد. یافته‌های این تحقیق نشان می‌دهد که به‌کارگیری روش سیمپلکس نه تنها موجب بهبود مقدار تابع هدف می‌شود، بلکه کاهش مصارف، صرفه‌جویی در منابع و افزایش استفاده را نیز به همراه دارد. با توجه به رشد پیچیدگی سیستم‌های اقتصادی، صنعتی و مدیریتی، استفاده از این روش می‌تواند در مدل‌سازی دقیق و

تحلیل مسائل نقش حیاتی ایفاء کند. ساختار منظم و انعطاف‌پذیر سیمپلکس، آن را برای حل مسائل با تعداد زیادی از متحول‌ها و محدودیت‌ها مناسب ساخته و دقت و سرعت محاسبات را افزایش می‌دهد. علاوه بر این، تسلط بر مفاهیم اساسی و مراحل اجرای این الگوریتم، محققان، مدیران و تحلیل‌گران را قادر می‌سازد تصمیمات استراتژیک بهینه اتخاذ نمایند. از دیدگاه آموزشی نیز، روش سیمپلکس می‌تواند به‌عنوان یک چارچوب مفهومی و عملی، درک عمیق‌تری از مفاهیم برنامه‌ریزی خطی و بهینه‌سازی را فراهم کند. بنابراین این روش همچنان یکی از ارکان اصلی تحقیق در عملیات باقی‌مانده و کاربرد آن در بخش‌های مختلف می‌تواند به ارتقای عملکرد سازمان‌ها و سیستم‌ها منجر شود.

منابع

ابراهیمی باران، رسول.(1391). **حل المسائل تحقیق در عملیات.** تهران: شهرآب.

آذر، عادل.(1394). **تحقیق در عملیات**. تهران: موسسه نشر علوم نوین.

حسن زاده، امیر.(1387) **. تحقیق در عملیات**. اصفهان: سپاهان.

طه, حمدی. (1388) **. آشنایی با تحقیق در عملیات.** تهران: مرکز نشردانشگاهی.

لی, مور و تیلور. (1374) **. پژوهش عملیاتی.** تهران: فتح دانش.

مهرگان, محمد رضا. (1374) **. پژوهش عملیاتی**. تهران: سالکان.

مهرگان, محمد رضا. (1394) **. تحقیق عملیات.** تهران: نشرکتاب دانشگاهی.

Bronson, R. (1992). *Operations research*. Chicago, IL: McGraw-Hill.

Copping, N. W. (1981). *Linear programming*. New York, NY: McGraw-Hill.

Hamdy, T. (1997). *Operations research*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.

Mathur, K., & Solow, D. (1994). *Management science*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.

Newbold, P. (1989). *Principles of management science*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.

Solow, K. (1994). *Management science*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.(n.d.).

Bronson, R. (1992). *0perations Research.* McGraw-Hill.

Coppins, N. w. (1981). *Linear programming.* McGraw- Hill.

Hamdy, T. (1997). *Operation research.* prentice-Hall.

Mathur, K., & Solow, D. (1994). *Management Science.* prentice-Hall.

Newbold, P. (1989). *Principles of Management science.* Prentice-Hall.

Solow, K. M. (1994). *Management Scince.* Perentice-Hall.

Investigation of the Simplex Method for Solving Linear Programming Models

Mohammad Yazdan Parast*[1], Farhad Hakimi[2], Ahmad Wali Noori[3],
Department of Mathematics, College of Education, Farah University
Email: m.afghan7272@gmail.com

Abstract

In the current era, the issue of production mix has not received sufficient attention in the objective functions of linear programming models within operations research. This oversight has often led to increased costs and reduced efficiency in decision-making systems. However, by utilizing linear programming models, such additional costs can be avoided. One of the most effective methods for solving such models is the Simplex method, which is recognized as an advanced and widely used technique in operations research. This method is specifically designed to solve models with linear objective functions and linear constraints, and it is particularly applicable to problems involving more than two decision variables—unlike simpler approaches such as the graphical method, which is limited to two-variable cases. The aim of this study is to introduce and comprehensively examine the Simplex method among other optimization techniques, with the goal of reducing unnecessary expenditures and enhancing the effectiveness of decision-making processes. This research has been conducted through a library-based approach and relies on reputable academic sources. The findings of the study indicate that the Simplex method is one of the key tools in analyzing and presenting information across various scientific fields, with a strong capability to simplify complex concepts and render them comprehensible to a wide audience. As a result, this method is introduced in full detail for solving linear programming models in operations research, aiming to minimize losses and maximize gains in everyday activities.

Keywords: Feasible region ،Maximum ،Minimum ،Objective function ،Simplex.